

Title	スピン3重項p波超流動研究の新たな展開: アンドレーエフ束縛状態とその多面性(<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点)
Author(s)	水島, 健
Citation	物性研究 (2011), 97(2): 149-192
Issue Date	2011-11-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/169623
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

スピン3重項 p 波超流動研究の新たな展開

— アンドレーエフ束縛状態とその多面性 —

岡山大学 大学院自然科学研究科 水島 健¹

(2011年10月3日受理)

近年、スピン3重項超伝導・超流動体における Andreev 束縛状態に注目が集まっている。量子渦や表面で出現する Andreev 束縛状態は Majorana 性や奇周波数対振幅、さらにはバルクに内在するトポロジカル不変量等と密接に関わっており、非常に多彩な側面を持っていることが近年の研究により明らかにされつつある。本稿では Bogoliubov-de Gennes 方程式の解析解を基にして、スピン3重項超伝導・超流動体における Andreev 束縛状態の出現やその多面性について解説する。この系のフェルミ場の演算子の性質は Majorana 場と類似性を持つ。Majorana 零エネルギーモードの特異性に起因して、その零モードが付随した量子渦は非可換エニオン統計に従う。

1 はじめに

今から100年前の1911年に Heike Kamerlingh Onnes により極低温において純金属の電気抵抗が零になる超伝導現象が発見された。その歴史的発見の後に Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) らはこの超伝導現象を電子のクーパー対の織りなす巨視的量子現象として微視的に理解することに成功した [1]。この BCS 理論によると、超伝導体における1粒子励起は電子的な励起と正孔的な励起の重ね合わせで記述される“準粒子励起”として記述される。1つの準粒子を励起するために必要なエネルギーはクーパー対を破壊するエネルギーに相当する。例えば単純な s 波超伝導体ではフェルミエネルギー近傍において準粒子状態密度が空となり、常に有限のエネルギーギャップ 2Δ が開く。フェルミエネルギー近傍の状態密度は比熱等の低温熱力学量を決定するため、超伝導転移に伴うエネルギーギャップ形成により s 波超伝導体の低温熱力学量は常伝導のそれと比べて強く抑制される等の顕著な性質を示す [2, 3]。

当初 Kamerlingh Onnes により発見された超伝導体は s 波対称性を持つものであったが、その後の長い超伝導/超流動研究の歴史の中でまず ^3He 原子の超流動現象が非 s 波型超流動研究の檜舞台に立った。Leggett [4]により確立されたスピン動力学に基づく核磁気共鳴の理解等から ^3He 超流動現象が p 波対称性を持つクーパー対に起因していることが揺るぎない事実として受け入れられている [5, 6]。さらには、有機超伝導、酸化物高温超伝導、重い電子系超伝導、空間反転対称性を持たない超伝導体等でも非 s 波型超伝導体が発見されている [7]。

¹E-mail: mizushima@mp.okayama-u.ac.jp

非 s 波型超伝導/超流動体²では、必ずしも全てではないが、運動量空間でのクーパー対ポテンシャル $\Delta(\mathbf{k})$ がフェルミ面上の特定の点（線）において零になるような点（線）ノード構造をとる。このような運動量空間中でのギャップレスな準粒子励起に起因して低エネルギー状態密度が等方的な s 波超伝導体に比べて顕著に増大する。3次元フェルミ球上に点（線）ノード構造を持つ場合、低エネルギー状態密度は $N(E) \propto E^2$ ($\propto E$) に比例する。バルクの超伝導対称性が低エネルギー状態密度を決定し、その結果、例えば低温比熱は $C(T)/T \propto T^2$ ($\propto T$)、熱伝導度は $\kappa(T) \propto T^3$ ($\propto T^2$)、核磁気緩和時間は $T_1 \propto T^{-5}$ ($\propto T^{-3}$) 等の温度依存性を示す [7]。つまり、バルクの超伝導対称性は低温熱力学量に反映される。ただし、クーパー対波動関数の位相に関する直接的な情報は失われる。磁場中の超伝導体や回転超流動体では、磁束渦糸（量子渦糸）に伴う低エネルギー状態密度の増加により、この一連の熱力学的な関係式が破綻することにも注意しておきたい [8]。

異方的超伝導体における点（線）ノード近傍の低エネルギー準粒子励起は、ある意味では運動量空間における束縛状態とも言える。一方で、実空間における準粒子束縛状態は Andreev 束縛状態として知られる [9, 10, 11, 12, 13]。超伝導物質が実空間において幾つかの領域に分割されたようなドメイン構造を考えよう。各超伝導ドメインの $U(1)$ 位相が異なる場合、その界面には必ず位相差に応じた低エネルギー準粒子励起が存在する。特にドメイン間の位相差が π の状況ではギャップレス分散を持つ準粒子が存在し、低温熱力学量、トンネル電流や輸送量等に大きな影響を与える。Andreev 束縛状態はドメイン構造に限らず、非常に一般的な概念であり、量子渦（磁束渦）状態や異方的超伝導体の表面状態などもこの概念を用いて説明される。一般に、クーパー対波動関数の重心自由度或は相対自由度に非自明な位相構造が生じた場合、位相特異点周りや界面に Andreev 束縛状態が出現する。

ここでは、量子渦や異方的超伝導体の表面に出現する Andreev 束縛状態について紹介する。先述の通り、Andreev 束縛状態は超伝導対関数の非自明な位相構造を直接的に反映しており、このような準粒子を詳しく調べることは超伝導状態を理解するためのプローブになる。Andreev 束縛状態という概念は銅酸化物高温超伝導の超伝導対称性を d 波に確定することに成功する等 [14]、以前からその重要性については認識されていた。一方で、近年、Andreev 束縛状態がトポロジカル不変量や Majorana 性、さらには奇周波数対振幅等の多面性を含んでいることが理論的に示唆されており、トポロジカル量子現象という最近の大きな潮流の根幹を支える概念として注目されている [12]。特に、ギャップレスな分散を持つ Andreev 束縛状態の出現は超伝導のバルク領域で定義されるトポロジカル不変量が非自明になることに起因しているため、ギャップレスな束縛状態は不純物や外部擾乱に対して強い耐性を示す [15, 16, 17, 18, 19, 20]。これまでにトポロジカル超伝導や奇周波数対振幅の物理については解説記事が既に幾つも出版されている [11, 12, 19, 20, 21]。そのためここでは、表面や量子渦等の様々な位相欠陥に閉じ込められた Andreev 束縛状態について主に解析的な側面から Majorana 性やトポロジカル不変量との関連性等の特異な性質を紹介する。

本稿の構成は以下の通りである。まず次節では一般的な形での Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式の導出と Nambu-Gor'kov 方程式との関連性について紹介する。BdG 方程式はいわば超伝

²以下では“超流動”と“超伝導”の違いは特に問題としないことにする。磁場侵入長が超伝導コヒーレンス長よりも十分に長い第2種超伝導体の極限を考えれば遮蔽効果は無視されるため、超流動体との結果に定性的な違いはない。

導版 Schrödinger 方程式であり、量子渦等の位相欠陥中の準粒子状態を量子力学的に記述することができる。3節で本稿の中心的概念である Andreev 束縛状態について説明する。ここではやや簡単な状況を考え、量子渦や表面束縛状態を Andreev 束縛状態と対応させて議論する。4節で超流動 ^3He やスピン3重項超伝導等の具体的な物質と対応させる。Andreev 束縛状態の Majorana 的な側面については5節にて触れる。

ここで、この本稿を通しての注意点を整理する。まず、 $\hbar=k_B=1$ とする。また、 τ_0 は 4×4 の単位行列であり、 $\tau_{x,y,z}$ は粒子-正孔空間での Pauli 行列、 $\hat{\sigma}$ はスピン空間での Pauli 行列とする。 \underline{a} は 4×4 の行列であり、 \hat{a} は 2×2 の行列である。また、繰り返される添字については暗に和をとることにする： $a_\mu b_\mu = \sum_\mu a_\mu b_\mu$ 。

2 Bogoliubov-de Gennes 方程式

超伝導及び超流動状態に対する最も微視的な理論は Green 関数に基づく Nambu-Gor'kov 方程式だろう。その Nambu-Gor'kov 方程式より自然に BdG 方程式が導出される³。この方程式は超伝導体における電子に対する一種の Schrödinger 方程式と見なせる [2, 3]。この節では一般的な形での BdG 方程式の導出とそのエネルギー固有状態の対称性等について整理する。特に固有状態の対称性は、この系に内在するトポロジカル不変量と直接的に関わっている。

2.1 Nambu-Gor'kov 理論

まず、やや一般的なハミルトニアンから出発しよう。相互作用ポテンシャル $V_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}(r_{12})$ を通して相互作用する2成分フェルミ粒子系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{r}_1 \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) H_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 V_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta}(r_{12}) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi_\gamma(\mathbf{r}_2) \psi_\delta(\mathbf{r}_1), \quad (1)$$

と与えられる。ここでギリシャ文字の添字を \uparrow, \downarrow とした。 $r_{12} \equiv |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ は相対座標であり、一粒子ハミルトニアン密度が $H_0^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2M}(\nabla - i\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) - \mu_{\uparrow,\downarrow}$ と与えられるものとする。 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルであり、任意の外部ポテンシャルを $V(\mathbf{r})$ で表す。

さて、Green 関数 \underline{G} を Nambu スピノル $\Psi = [\psi_\uparrow, \psi_\downarrow, \psi_\uparrow^\dagger, \psi_\downarrow^\dagger]^T$ を用いて以下のように定義する [23]：

$$\underline{G}(x_1, x_2) \equiv \left\langle T_\tau \left[\Psi(x_1) \Psi^\dagger(x_2) \right] \right\rangle = \begin{bmatrix} \mathcal{G}(x_1, x_2) & \mathcal{F}(x_1, x_2) \\ \mathcal{F}^\dagger(x_1, x_2) & \mathcal{G}^\dagger(x_1, x_2) \end{bmatrix} = T \sum_n \underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{-i\omega_n \tau_{12}}. \quad (2)$$

ただし、 $x_j = (\mathbf{r}_j, \tau_j)$ とした。また、 $\omega_n = (2n+1)\pi T$ はフェルミ粒子に対する松原振動数 ($n \in \mathbb{Z}$) であり、 T は温度とする。この Green 関数に対する運動方程式、即ち Nambu-Gor'kov 方程式は Heisenberg 表示での場の演算子 $\psi_\alpha(x_j)$ に対する Heisenberg 方程式 $\frac{\partial}{\partial \tau_j} \psi_\alpha(x_j) = [\mathcal{H}, \psi_\alpha(x_j)]$ より

$$-i\omega_n \tau_0 \underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) + \int d\mathbf{r}_3 \underline{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \underline{G}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \tau_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (3)$$

³Baym-Kadanoff の保存近似に基づくより一般的な理論形式については文献 [22] が詳しい。

と与えられる。\$\mathcal{I}_0\$ は \$4 \times 4\$ の単位行列を表す。ここで、\$\mathcal{K}\$ は \$4 \times 4\$ の行列であり、平均場近似されたハミルトニアン密度に対応する：

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \underline{H}(\mathbf{r}_1) + \underline{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \underline{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4)$$

ここで、\$\underline{H} \equiv \text{diag}(H_\uparrow, H_\downarrow, -H_\uparrow^*, -H_\downarrow^*)\$ とした。\$\underline{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\$ は自己エネルギーの対角成分、\$\underline{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\$ は非対角成分であり、

$$\underline{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \begin{bmatrix} \hat{0} & \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -\hat{\Delta}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \hat{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \begin{bmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

この非対角成分、つまり対ポテンシャルは Green 関数 \$\underline{G}\$ の非対角成分と有効引力相互作用 \$V\$ によって与えられる（ギャップ方程式）：

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv V(r_{12}) \mathcal{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_{21} = 0_+) = V(r_{12}) T \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \sum_n \mathcal{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; i\omega_n) e^{-i\omega_n \eta}. \quad (6)$$

簡単のために、有効引力相互作用 \$V\$ に関してはスピン空間での回転対称性を仮定した。通常の超伝導体では \$\underline{\Sigma}\$ は化学ポテンシャルへ繰り込めるためあまり重要ではない。Nambu-Gor'kov 方程式 (3) とギャップ方程式 (6) は自己無撞着な方程式となっている。

2.2 Bogoliubov-de Gennes 方程式とギャップ方程式

さて、Green 関数 \$\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)\$ を求めるために、通常の手順に従い Bogoliubov 変換を導入する。これはスピノル \$\Psi(\mathbf{r})\$ から準粒子演算子 \$\eta_\nu\$ へのユニタリー変換に対応する：

$$\Psi(\mathbf{r}_1) = \sum_\nu \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \eta_\nu, \quad \eta_\nu = \begin{bmatrix} \eta_{\nu,\uparrow}, \eta_{\nu,\downarrow}, \eta_{\nu,\uparrow}^\dagger, \eta_{\nu,\downarrow}^\dagger \end{bmatrix}^T. \quad (7)$$

\$\nu\$ は適当な量子数の組みを表すものとする。準粒子演算子 \$\eta_\nu\$ はフェルミオンの反交換関係を満たしている：\$\{\eta_{\nu,\alpha}, \eta_{\mu,\beta}^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\nu,\mu}\$, \$\{\eta_{\nu,\alpha}, \eta_{\mu,\alpha}\} = \{\eta_{\nu,\alpha}^\dagger, \eta_{\mu,\beta}^\dagger\} = 0\$。\$4 \times 4\$ の変換行列 \$\underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1)\$ は以下の直交条件と完全性を満たすものとする：

$$\int \underline{u}_\nu^\dagger(\mathbf{r}_1) \underline{u}_\mu(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \delta_{\nu,\mu} \mathcal{I}_0, \quad \sum_\nu \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \underline{u}_\nu^\dagger(\mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathcal{I}_0. \quad (8)$$

この様なユニタリー変換を用いると、Green 関数 \$\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)\$ は準粒子基底での表示と以下のように対応する：

$$\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \sum_{\nu,\mu} \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \underline{G}_{\nu\mu}(i\omega_n) \underline{u}_\mu^\dagger(\mathbf{r}_2). \quad (9)$$

この準粒子基底での Green 関数 \$\underline{G}_{\nu\mu}(i\omega_n)\$ が文字通り自由粒子的な Green 関数の様に対角化されるためには変換行列 \$\underline{u}_\nu(\mathbf{r})\$ が以下の方程式を満たしている必要がある：

$$\int d\mathbf{r}_2 \mathcal{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_2) = \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \underline{E}_\nu. \quad (10)$$

ここで、 $\underline{E}_\nu \equiv \text{diag}[E_\nu^\uparrow, E_\nu^\downarrow, -E_\nu^\uparrow, -E_\nu^\downarrow]^T$ である。式 (8), (9), (10) を用いると Nambu-Gor'kov 方程式 (3) は

$$[-i\omega_n \mathcal{I}_0 + \underline{E}_\nu] \underline{G}_{\nu\mu}(\omega_n) = \delta_{\nu\mu} \mathcal{I}_0. \quad (11)$$

となり、この解は直ちにエネルギー E_ν を持つ自由フェルミ粒子の Green 関数

$$\underline{G}_{\nu\mu}(\omega) = \delta_{\nu\mu} [-i\omega_n \mathcal{I}_0 + \underline{E}_\nu]^{-1} \mathcal{I}_0 = \delta_{\nu\mu} \text{diag} \left[g(E_\nu^\uparrow), g(E_\nu^\downarrow), g(-E_\nu^\uparrow), g(-E_\nu^\downarrow) \right], \quad (12)$$

となることがわかる。ただし $g^{-1}(E) \equiv -i\omega_n + E$ とした。

ここで、変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ について触れておく。まず、行列 $\underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は一般に以下のような対称性を示すことに注意したい：

$$-\mathcal{I}_x \underline{K}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{I}_x = \underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (13)$$

この対称性を用いると、式 (10) より直ちに変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ が

$$\underline{u}_\nu(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \hat{u}_\nu(\mathbf{r}) & \hat{v}_\nu^*(\mathbf{r}) \\ \hat{v}_\nu(\mathbf{r}) & \hat{u}_\nu^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

となることがわかる。ただし、 $\hat{u}_\nu(\mathbf{r}), \hat{v}_\nu(\mathbf{r})$ は 2×2 の行列とする。つまり、独立な成分は $\hat{u}_\nu(\mathbf{r}), \hat{v}_\nu(\mathbf{r})$ であるが、ここで、

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_\nu(\mathbf{r}) \\ \hat{v}_\nu(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \equiv [\varphi_\nu^{(1)}(\mathbf{r}), \varphi_\nu^{(2)}(\mathbf{r})], \quad (15)$$

とおくと、式 (10) より、 $\varphi_\nu^{(1)}(\mathbf{r})$ と $\varphi_\nu^{(2)}(\mathbf{r})$ は行列 $\underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ の同じ固有値 E_ν を持つ固有関数であることがわかる。そのため $\varphi_\nu^{(1)}(\mathbf{r})$ と $\varphi_\nu^{(2)}(\mathbf{r})$ は（少なくとも数値計算上では）区別がつかず、ひとつの固有関数

$$\boldsymbol{\varphi}_\nu = [u_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}), u_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r}), v_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}), v_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r})]^T \quad (16)$$

を用いてまとめて表すことができる。結局、場の演算子 $\Psi(\mathbf{r})$ はこの固有関数 $\boldsymbol{\varphi}_\nu(\mathbf{r})$ を係数として準粒子演算子 $[\eta_\nu, \eta_\nu^\dagger]$ を用いて以下のように展開される。

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_\nu \underline{U}_\nu(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} \eta_\nu \\ \eta_\nu^\dagger \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_\nu(\mathbf{r}) \equiv [\boldsymbol{\varphi}_\nu(\mathbf{r}), \mathcal{I}_x \boldsymbol{\varphi}_\nu^*(\mathbf{r})] = \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}) & v_{\nu,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \\ u_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r}) & v_{\nu,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}) & u_{\nu,\uparrow}^*(\mathbf{r}) \\ v_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r}) & u_{\nu,\downarrow}^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

この新たな係数行列の直交条件と完全性は式 (8) において $\underline{u}_\nu(\mathbf{r}) \rightarrow \underline{U}_\nu(\mathbf{r})$ としてやれば良い。結局、変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ が満たすべき条件式 (10) は

$$\int d\mathbf{r}_2 \underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \boldsymbol{\varphi}_\nu(\mathbf{r}_2) = E_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu(\mathbf{r}_1). \quad (18)$$

と簡単化される。これが BdG 方程式である。

展開式 (9) より, Green 関数 $\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$ が BdG 方程式 (18) のエネルギー固有値 E_ν と固有関数 $\varphi_\nu(\mathbf{r})$ を用いて表すことができる:

$$\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) & \mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \\ \mathcal{F}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) & \mathcal{G}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \end{bmatrix} = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(\mathbf{r}_1)\varphi_\nu^\dagger(\mathbf{r}_2)}{-i\omega_n + E_\nu}. \quad (19)$$

Green 関数に対する表式 (19) を式 (6) へ代入して松原振動数に対する和を実行すると, ギャップ方程式が BdG 方程式 (18) の固有関数を用いて以下のように表される:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(r_{12})T \lim_{\eta \rightarrow 0+} \sum_n \mathcal{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; i\omega_n) e^{-i\omega_n \eta} = V(r_{12}) \sum_\nu u_{\nu,\alpha}(\mathbf{r}_1) v_{\nu,\beta}^*(\mathbf{r}_2) f(E_\nu). \quad (20)$$

ただし, $\lim_{\eta \rightarrow 0+} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - x} e^{\eta z} = \frac{\beta}{e^{\beta x} + 1} = \beta f(x)$ である。

異常 Green 関数はフェルミ粒子のスピンの座標、そして時間の同時入れ替えに対して奇関数である: $\mathcal{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) = -\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$. つまり, クーパー対ポテンシャルのスピン状態のパリティを $\mathcal{P}_{\text{spin}} = \pm 1$ とし, 軌道状態に関して $\mathcal{P}_{\text{orbit}} = \pm 1$, 松原振動数に関して $\mathcal{P}_\omega = \pm 1$ とすると $\mathcal{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \mathcal{P}_{\text{spin}} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$, $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; i\omega_n) = \mathcal{P}_{\text{orbit}} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$, $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -i\omega_n) = \mathcal{P}_\omega \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$, である。上述のスピン, 座標, 時間 (振動数) の同時交換に対するフェルミ粒子の対称性により,

$$\mathcal{P}_{\text{spin}} \mathcal{P}_{\text{orbit}} \mathcal{P}_\omega = -1 \quad (21)$$

が要請される [11, 12]. つまり, クーパー対相関 $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$ において可能な組み合わせは,

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_{\text{spin}}, \mathcal{P}_{\text{orbit}}) = (-1, +1), (+1, -1) & \text{for } \mathcal{P}_\omega = +1 \\ (\mathcal{P}_{\text{spin}}, \mathcal{P}_{\text{orbit}}) = (-1, -1), (+1, +1) & \text{for } \mathcal{P}_\omega = -1 \end{cases} \quad (22)$$

である。中でも, 松原振動数に対して奇パリティを示すものは奇周波数クーパー対振幅と呼ばれ, 超伝導体の界面や接合面等において異常な近接効果を示す直接的な原因であると指摘されている [12]. 一方で, 粒子間相互作用ポテンシャルとして時間に依存しないような瞬間的な相互作用 $V(\mathbf{r}_{12})\delta(\tau_{12})$ を考えると, 奇周波数成分 $\mathcal{P}_\omega = -1$ は対ポテンシャル $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ に寄与しないことがわかる。つまり, 奇周波数成分が対ポテンシャル $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ に有限の寄与を与えるためには相互作用ポテンシャルが周波数に対して奇パリティを持っている必要がある。奇周波数クーパー対振幅 $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -i\omega_n) = -\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$ の詳細に関しては Tanaka 等による解説論文 [11, 12] がある。

後々のために, 対ポテンシャル $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ を相対座標に関してフーリエ変換した表示 $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ を導入する ($\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ は重心座標). 相対座標に関して回転対称性があるとする, $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ は角運動量の固有関数である球面調和関数 $Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}})$ を用いて展開される [5]:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}_{12} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{12}} \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\ell,m} \Delta_{\alpha\beta}^{(\ell,m)}(\mathbf{r}) \Gamma_\ell(k) Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (23)$$

ただし、 $\Gamma_\ell(k)$ は相対運動量 \mathbf{k} の大きさに依存した関数であり、通常は $\Gamma_\ell(k) \approx k/k_F$ としておく。この詳細については後ほど触れる。また、一般に $\ell=0, 1, 2, \dots$, $m=0, \pm 1, \dots, \ell$ である。式 (22) に示した対称性より、偶周波数成分 $\mathcal{P}_\omega = +1$ の超伝導体の場合はスピン 1 重項状態 $\mathcal{P}_{\text{spin}} = -1$ では偶パリティ軌道状態 $\mathcal{P}_{\text{orbit}} = +1$ つまり $\ell=0$ (*s* 波), $\ell=2$ (*d* 波) 等が許される。一方で、スピン 3 重項状態 $\mathcal{P}_{\text{spin}} = +1$ では奇パリティ軌道状態 $\mathcal{P}_{\text{orbit}} = -1$ つまり $\ell=1$ (*p* 波), $\ell=3$ (*f* 波) 等が選択される。

尚、スピン 3 重項超流動状態を考えると、一般に $\Delta_{\uparrow\uparrow}, \Delta_{\uparrow\downarrow} = \Delta_{\downarrow\uparrow}, \Delta_{\downarrow\downarrow}$ の 3 つのスピン状態が存在する。そこで、 $\ell=1$ の球面調和関数 $Y_{1,m}$ に倣い、新しい基底 $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ を導入すると便利である [6] :

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad |y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (24)$$

この基底を用いると、スピン 3 重項超流動の秩序変数は一般に

$$\Delta_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\uparrow\rangle + \Delta_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\downarrow\rangle + \Delta_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\uparrow\rangle + \Delta_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\downarrow\rangle = \sqrt{2} \sum_{\mu=x,y,z} |\mu\rangle, \quad (25)$$

のように、3 つの d_x, d_y, d_z を用いて表すことができる。これらから構成されるベクトル $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$ はスピン空間での回転に対して 3 次元ベクトルとして振る舞う。これを整理すると、

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \end{bmatrix} = i\sigma_\mu \sigma_y d_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (26)$$

となる。

2.3 スピン 1 重項超流動

ここからは、偶周波数成分クーパ対のみを考える $\mathcal{P}_\omega = +1$ 。まず、スピン 1 重項超伝導体を考える。つまり、 $\mathcal{P}_{\text{spin}} = -1$ であり、軌道状態は偶パリティ $\mathcal{P}_{\text{orbit}}$ のみが許されるためスピン 1 重項 *s* 波 ($\ell=0$) 或いは *d* 波 ($\ell=2$) 超伝導体などが対称性として許される。ここで、特定の軸 (例えば *z* 軸) を量子化軸とした基底を用いて

$$\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{bmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{\text{sing}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -\Delta_{\text{sing}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

と書ける。これを BdG 方程式 (18) へ代入し、ユニタリー変換を行なうと、スピン空間が 2 つのセクターに分離することが分かる。具体的には、式 (18) の行列 \underline{K} を

$$\underline{T} \underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \underline{T}^\dagger = \begin{bmatrix} \hat{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{K}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix}, \quad \underline{T} = \underline{T}^\dagger \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

と部分対角化できることに注意すると、式 (18) は

$$\int d\mathbf{r}_2 \hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \begin{bmatrix} u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_2) \\ v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_2) \end{bmatrix} = E_\nu \begin{bmatrix} u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1) \\ v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \quad (29a)$$

$$\int d\mathbf{r}_2 \hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \begin{bmatrix} v_{\nu, \uparrow}^*(\mathbf{r}_2) \\ u_{\nu, \downarrow}^*(\mathbf{r}_2) \end{bmatrix} = -E_\nu \begin{bmatrix} v_{\nu, \uparrow}^*(\mathbf{r}_1) \\ u_{\nu, \downarrow}^*(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \quad (29b)$$

となる。つまり、式 (29a) は行列 $\hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ のエネルギー固有値 E_ν の固有状態であり、(29b) はエネルギー固有値 $-E_\nu$ の固有状態である。この2式がスピン1重項超伝導体に対する BdG 方程式である。ちなみに、

$$\hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \begin{bmatrix} \delta(\mathbf{r}_{12}) H_0^{(\uparrow)}(\mathbf{r}_1) & \Delta_{\text{sing}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \Delta_{\text{sing}}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & -\delta(\mathbf{r}_{12}) H_0^{(\downarrow)*}(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

とした。式 (29a), (29b) の2つとも同じ行列 $\hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ の固有状態であるから、少なくとも数値計算上では区別できない。つまり、数値計算では式 (29a) を計算すれば自然と式 (29b) に対応する固有状態も含まれている。

しかしながら、簡単のために、 $H_0^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) = H_0^{(\downarrow)}(\mathbf{r}) \equiv H_0(\mathbf{r})$ が成立している場合を考えてみよう。この場合、

$$-(i\sigma_y) \hat{\mathcal{K}}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) (i\sigma_y)^T = \hat{\mathcal{K}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (31)$$

という関係性が成り立っていることに注意する。つまり、BdG 方程式 (29b) を $P = i\sigma_y K$ というユニタリ行列を用いて変換することで、エネルギー固有状態 E_ν と $-E_\nu$ を対応づけることができる (K は複素共役演算)。これを粒子-正孔対称性と呼び、スピン1重項超伝導体では $P^2 = -1$ である。具体的に、式 (29b) の固有関数は $[v_{\nu, \uparrow}^*(\mathbf{r}_1), u_{\nu, \downarrow}^*(\mathbf{r}_1)] \rightarrow [-u_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1), v_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1)]$ へと変換される。つまり、この対称性の下で式 (29b) は $[-u_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1), v_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1)] = [u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1), v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1)]$ の置き換えの下で式 (29a) と等価になる。この関係 $[-u_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1), v_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1)] = [u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}_1), v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}_1)]$ はスピン1重項超伝導対ポテンシャルの対称性 $\Delta_{\uparrow\downarrow} = \Delta_{\downarrow\uparrow}$ を反映している (s 波対称性の場合は直ちに確かめられる)。以上の性質を用いると、場の演算子 $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ は準粒子演算子 $\eta_\nu, \eta_\nu^\dagger$ を用いて、

$$\psi_\uparrow(\mathbf{r}) = \sum_\nu \left[u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu + v_{\nu, \uparrow}^*(\mathbf{r}) \eta_\nu^\dagger \right] = \sum_\nu \left[u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu + v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu^\dagger \right], \quad (32a)$$

$$\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_\nu \left[v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu + u_{\nu, \downarrow}^*(\mathbf{r}) \eta_\nu^\dagger \right] = \sum_\nu \left[v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu - u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}) \eta_\nu^\dagger \right], \quad (32b)$$

と展開される。このとき、エネルギー固有状態の対応関係は

$$[u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r}), v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r})]^T \text{ for } E_\nu \quad \Leftrightarrow \quad [-v_{\nu, \downarrow}^*(\mathbf{r}), u_{\nu, \uparrow}^*(\mathbf{r})]^T \text{ for } -E_\nu, \quad (33)$$

となる⁴。

⁴ $H_0^{(\uparrow)}(\mathbf{r}) \neq H_0^{(\downarrow)}(\mathbf{r})$ の場合については文献 [24] を参考にして頂きたい。

2.4 スピン3重項超流動

ここで、式 (13) で示したハミルトニアン密度の対称性 $-\mathcal{I}_x \mathcal{K}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{I}_x = \mathcal{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ に注目すると、正のエネルギー固有状態と負の固有状態との間に 1 対 1 対応があることがわかる。つまり、スピン3重項超伝導体の場合は粒子-正孔変換の演算子は $P = \tau_x$ であり、 $P^2 = 1$ となる粒子-正孔対称性を持つ。ここで、 \mathcal{I}_j は粒子-正孔空間でのパウリ行列とする。つまり、

$$\varphi_\nu(\mathbf{r}_1) \equiv \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}_1) \\ u_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r}_1) \\ v_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}_1) \\ v_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \quad E_\nu \Leftrightarrow \mathcal{I}_1 \varphi_\nu^*(\mathbf{r}_1) = \begin{bmatrix} v_{\nu,\uparrow}^*(\mathbf{r}_1) \\ v_{\nu,\downarrow}^*(\mathbf{r}_1) \\ u_{\nu,\uparrow}^*(\mathbf{r}_1) \\ u_{\nu,\downarrow}^*(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \quad -E_\nu. \quad (34)$$

ただし、上述の通り、1重項超伝導体の場合は $[u_{\nu,\uparrow}, v_{\nu,\downarrow}]$ と $[v_{\nu,\uparrow}, u_{\nu,\downarrow}]$ のセクターが分離しているため式 (34) は意味がないことに注意しておきたい。

具体的に p 波超流動体を考えよう。この対ポテンシャルは式 (23) において $\ell=1$ とすれば良い。スピン3重項 p 波超流動体の秩序変数は軌道自由度3つとスピン自由度3つの合計 $3 \times 3 = 9$ 個の $\Delta_{\alpha\beta}^{(\ell=1,m)}$ から成る（厳密にはこれに位相の自由度が加わる）。このような膨大な自由度を持つ超流動体では様々なスピンと軌道状態の組み合わせが可能であり、存在し得る全ての秩序状態を挙げることは難しい問題である。

この問題に対する解法として Vollhardt-Wölfle [6] に従い、元々のハミルトニアンの部分群に基づいた議論を紹介する。ただし、紙面の都合上、全ての秩序状態（部分群）を挙げることはせずに、超流動 ^3He の秩序状態として代表的なもののみを考えることにする。ここでは簡単のために元々のハミルトニアンがスピン空間と軌道空間における3次元連続回転対称性を持っていることを仮定する。これは超流動 ^3He では成立しているが⁵、超伝導物質系では結晶構造の離散的な回転対称性のため連続的な回転対称性は示さず、秩序空間の自由度は超流動 ^3He のそれに比べて低下する [7]。この意味でも超流動 ^3He では様々なパラメータ領域にて多様な自発的対称性の破れを伴う秩序状態が存在し、スピン3重項超流動に対する教科書的物質であると言えよう。

さて、ハミルトニアンの対称性は $G = \text{SO}(3)_S \times \text{SO}(3)_L \times \text{U}(1)$ というようにスピン及び軌道空間での3次元回転操作 $\text{SO}(3)_S, \text{SO}(3)_L$ と位相変換操作 $\text{U}(1)$ により特徴づけられているものとする。超流動状態は元々のハミルトニアンの対称性 G を破った状態である。そこで、超流動転移により自発的に破られる対称性を R とし、超流動転移後も残る対称性を H とすると、 $R = G/H$ である。超伝導転移後も生き残る対称性 H は元々のハミルトニアンの対称性 G の部分群であるべきである。以下では、超流動 ^3He で代表的な B 相、A 相 について触れる。

⁵厳密に言えば ^3He 原子間には小さいが有限の磁気的雙極子相互作用が働く。そのためにスピン空間と軌道空間とが結合し $\text{SO}(3)_S \times \text{SO}(3)_L$ の対称性が低下している。ただし、この相互作用は非常に弱く摂動的に扱えるので秩序状態の分類の段階では無視する [6]。

2.4.1 超流動 ^3He B 相

B 相にて残った対称性は $H = \text{SO}(3)_{L+S}$ ，つまりスピンと軌道空間での同時回転に対する対称性を保っている．この超流動転移において自発的に破られる対称性は

$$R = \frac{\text{SO}(3)_S \times \text{SO}(3)_L \times \text{U}(1)}{\text{SO}(3)_{L+S}} = \text{SO}(3)_{L-S} \times \text{U}(1), \quad (35)$$

となる．ここで， $\text{SO}(3)_{L-S}$ はスピンと軌道空間の相対的な回転操作を表す．つまり，B 相の秩序状態は相対的な回転操作 $\text{SO}(3)_{L-S}$ に起因した縮退度を持っている．この回転軸を \hat{n} として回転角を φ とすると，一般的な B 相の秩序変数は

$$d_\mu(\hat{k}, \mathbf{r}) = d_{\mu\nu} \hat{k}_\nu = e^{i\phi} R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi) \Delta_\nu(\mathbf{r}) \hat{k}_\nu, \quad (36)$$

と与えられる (ϕ は $\text{U}(1)$ 位相を表す)．ただし， $R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi)$ は回転軸 \hat{n} 周りの角度 φ の回転を表す行列であり，回転操作 $\text{SO}(3)_{L-S}$ に起因している．この行列の具体的な表現は

$$R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi) = \cos\varphi + (1 - \cos\varphi) \hat{n}_\mu \hat{n}_\nu - \epsilon_{\mu\nu\eta} \hat{n}_\eta \sin\varphi, \quad (37)$$

と与えられる [6]．バルクの超流動 ^3He B 相ではエネルギーギャップは， $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z \equiv \Delta$ とすると， $\sqrt{d_\mu^\dagger d_\mu} = \Delta$ となり，等方的なエネルギーギャップを開く．等方的なギャップを持つ状態は他の基底状態の候補 (A 相等) に比べて凝縮エネルギーの利得があるため，バルク ^3He の超流動相図の大部分はこの B 相によって占められている [6]．

式 (36) より，B 相の秩序状態は \hat{n} と φ によって表されることがわかった．それでは，平衡状態では \hat{n} と φ はどのような値をとるのか？ 空間的に一様な秩序状態においてこれを観るためには，双極子相互作用と磁場に起因したエネルギーを考えれば十分である．秩序変数の自由度のみを考えると (即ち，準粒子の寄与を無視すると)，熱力学的安定性を議論する上で重要なエネルギーは凝縮エネルギー，勾配エネルギー，磁場エネルギー，双極子相互作用エネルギー等である．そこでまず双極子相互作用エネルギーを考えよう：

$$F_D = N_F \lambda_D \left\langle 3 \left| \hat{k}_\mu d_\mu(\hat{k}) \right|^2 - |d(\hat{k})|^2 \right\rangle_{\hat{k}}. \quad (38)$$

ここで， N_F はフェルミエネルギーでの状態密度であり， λ_D は双極子相互作用の強さを表す因子である [6]．また， $\langle \dots \rangle_{\hat{k}} = \int d\Omega_{\hat{k}} / 4\pi \dots$ はフェルミ面平均を表す．式 (38) は任意の秩序状態に対する双極子相互作用エネルギーの一般的な表式であるが，これに式 (36) を代入すると，B 相における双極子相互作用エネルギーが得られる：

$$F_D = \frac{8}{5} g_D \left(\cos\varphi + \frac{1}{4} \right)^2 + \text{const.} \quad (39)$$

ただし， $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z \equiv \Delta$ とした．式 (39) を最小化するのは $\varphi = \cos(-\frac{1}{4}) \approx \pm 104^\circ$ のときである (Leggett 角度)．尚，双極子相互作用エネルギーはバルク領域では \hat{n} に対する制約を与えないが，表面では \hat{n} の向きに対して影響を与える．これについては，4.2.2 節で触れる．

一方で、磁場エネルギーはバルク B 相において \hat{n} の向きを決定する。一般に、磁場のエネルギーは

$$F_H = -\frac{1}{2}\chi_{\mu\nu}H_\mu H_\nu, \quad (40)$$

で与えられる。ここで、 $\chi_{\mu\nu}$ はスピン帯磁率を表すテンソルであり、秩序状態に依存する。ただし、B 相の秩序状態 (36) のスピン帯磁率は $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z \equiv \Delta$ とすると等方的になるため、 F_H は \hat{n} や φ に依存せずユニークな値をとる。しかし、磁気的双極子相互作用に起因したスピン-軌道相互作用は B 相の等方的なエネルギーギャップをわずかに歪める： $\Delta_z \neq \Delta_x, \Delta_y$ 。そのような高次の効果を考慮すると、B 相における磁場エネルギーは

$$F_H = -\frac{1}{2}\lambda_D N_F \left(\frac{\gamma}{1 + F_0^a} \right)^2 (\hat{n} \cdot \mathbf{H})^2. \quad (41)$$

ここで、 F_0^a はスピン帯磁率に関連する Landau のフェルミ液体パラメータである。 γ は ^3He 原子核の磁気回転比である。磁場エネルギーを最小にするためには、 $\hat{n} \parallel \mathbf{H}$ であることが要請される。

Schnyder ら [16] は任意のハミルトニアンを時間反転対称性、荷電共役対称性、カイラル対称性を基に分類し、それぞれの持つトポロジカル不変量を明らかにした。B 相の持つトポロジカル不変量を紹介するために、B 相の秩序変数 (36) を持つ BdG 方程式 (18) の対称性を整理しておく。まず、 $d_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ の詳細に依存せず、スピン 3 重項超伝導体の場合は一般に式 (13) の形の粒子-正孔対称性を保っている。加えて、B 相の秩序変数 (36) の場合には BdG 方程式 (18) の行列 K が以下の対称性を示す：

$$(i\sigma_y) \underline{K}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) (-i\sigma_y)^\dagger = \underline{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (42)$$

これは時間反転操作の下で B 相が不変性を保っていることを示す。ただし、この対称性が保たれるためにはスピンに結合したゼーマン磁場等の効果が存在しないことが前提である。式 (13) の荷電共役変換の演算子は $\Gamma = \underline{\tau}_x K$ であり、 $\Gamma^2 = +1$ である (K は複素共役操作を表す)。一方の式 (42) で示される時間反転操作は $T = i\underline{\sigma}_y K$ であり、 $T^2 = -1$ である。さらに時間反転と荷電共役操作を同時に行う合成変換 $C \equiv \Gamma \times T$ の下でハミルトニアンは不変である。このときカイラル対称性を持つという。以上を整理すると、B 相の秩序状態は一般に $T^2 = -1$ を満たす時間反転操作、 $\Gamma^2 = +1$ を満たす荷電共役操作、及びカイラル操作 C の下で不変性を示すことがわかる。この対称性を持つ秩序状態は Schnyder ら [16] の分類表に従うと class DIII に分類される。この対称性クラスは 1 次元、2 次元空間では \mathbb{Z}_2 対称性を持ち、3 次元空間では \mathbb{Z} 対称性を持つことが示されている。つまり、外部磁場等が存在しない限り ^3He -B 相は任意の次元において非自明なトポロジカル不変量を持つトポロジカル超流動体である。真空でのトポロジーは常に自明であるから、トポロジカル超流動体の表面ではトポロジカル相転移が生じていると見なせる。バルク領域でのトポロジカル不変量は準粒子構造の特異性を反映しており、真空中での自明な構造へ相転移するためには一度準粒子励起スペクトルをギャップレスにして準粒子構造を“再構成”する必要がある。バルク・エッジ対応と呼ばれるこの性質はトポロジカル超流動体の表面や界面では常にギャップレ

スな分散を持つ準粒子状態が存在することを示唆している。さらに、その準粒子状態はバルクのトポロジカルな性質に起因しているため、外部擾乱や不純物等に対して強い耐性を持つ。実際に、 $^3\text{He-B}$ の表面においてギャップレスな Andreev 束縛状態が出現することを 4.2.2 節にて示す。

外部磁場が存在する場合の $^3\text{He-B}$ 相には時間反転対称性が破られており、その結果としてカイラル対称性も破られる。つまり、荷電共役対称性のみが残る class D に分類される。この対称性クラスは $^3\text{He A}$ 相と等価であり、3次元空間ではトポロジカルに自明である。しかしながら、磁場中の3次元 $^3\text{He-B}$ 相においても依然として Ising variable [25] や巻き付き数 (winding number) [26] 等のトポロジカル不変量が定義できることが議論されている。

2.4.2 超流動 $^3\text{He A}$ 相

超流動 $^3\text{He A}$ 相は軌道強磁性状態であり、その秩序変数は一般に、

$$d_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) e^{i\phi} \hat{d}_\mu (\hat{m}_\nu + i\hat{n}_\nu) \hat{k}_\nu \quad (43)$$

として、3つの3次元実ベクトル $(\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ を用いて表現される [6]。バルクの A 相では $\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}$ は単位ベクトルであり、互いに直交している ($\hat{\mathbf{m}} \perp \hat{\mathbf{n}}$)。そのため、 $\hat{\mathbf{m}}$ と $\hat{\mathbf{n}}$ のいずれにも直交したベクトル $\hat{\ell} \equiv \hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}$ を定義すると便利である。例えば、シンプルな A 相の秩序変数として $d_\mu \propto \delta_{\mu z} \hat{d}_z (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)$ を考えよう。このとき、 $\hat{\ell} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ となり、 $\hat{\ell}$ はクーパー対の軌道角運動量の方向を表していることがわかる。準粒子励起のエネルギーギャップはバルク A 相において $\sqrt{\hat{\mathbf{d}}^\dagger \hat{\mathbf{d}}} = \Delta(1 - \hat{k}_z^2)$ であり、3次元フェルミ球の北極と南極上にギャップレス励起 (点ノード) を持つ。クーパー対の軌道角運動量の方向と点ノードの方向は一致するため、 $\hat{\ell}$ ベクトルは点ノードの方向も指し示している。点ノード構造を伴うために A 相は B 相に比べて凝縮エネルギーを獲得できないため、スピン揺らぎのフィードバック効果等を相互作用に繰り込まないと B 相に比べて熱力学的に安定にならない [27]。そのため、バルク超流動 ^3He では高温、高圧の限られたパラメータ領域でのみ安定となり得る。一方で、サブミクロン程度の厚さに閉じ込められた超流動 ^3He では試料の壁の効果に起因して低温、低圧の広い領域で熱力学的に安定化することが理論的にも実験的にも確認されている [28]。

A 相の秩序変数を表す $\hat{\mathbf{d}}$ と $\hat{\ell}$ の2つの実ベクトルに注目しよう。それぞれ、スピン自由度と軌道自由度を表しているので、 $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルは磁場と結合することが期待される。実際に、磁場エネルギーの表式 (40) に A 相の異方的なスピン帯磁率を代入すると

$$F_H = \frac{1}{2} \chi_N \frac{1 - Y_0(T)}{1 + F_0^* Y_0(T)} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{H})^2 \quad (44)$$

が得られる。ここで、 χ_N は常流動状態でのスピン帯磁率を表し、 $Y_0(T)$ はフェルミ面平均された芳田関数である。式 (44) より、磁場エネルギーを最小化するための条件は $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルが磁場 \mathbf{H} に垂直であるということがわかる： $\hat{\mathbf{d}} \perp \mathbf{H}$ 。

一方の双極子相互作用エネルギーはスピン状態と軌道状態を結合させる．式 (38) に A 相の秩序変数 (43) を代入すると、

$$F_D = -\frac{2}{5}\lambda_D N_F \Delta^2 (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{\ell}})^2 \quad (45)$$

となり、 $\hat{\mathbf{d}} \parallel \hat{\mathbf{\ell}}$ を満たすときに F_D が最小化される．ただし、このスピンと軌道の結合は磁気双極子相互作用エネルギーに起因しているため非常に弱く、磁場のスケールではおおよそ $H_D \simeq 20\text{G}$ 程度である． $H \gg H_D$ の大きな磁場のもとでは、双極子相互作用によるスピン・軌道結合 $\hat{\mathbf{d}} \parallel \hat{\mathbf{\ell}}$ を無視して、 $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルは \mathbf{H} に常に垂直に向く．

A 相における連続対称性の破れは

$$R = \frac{\text{SO}(3)_S \times \text{SO}(3)_L \times \text{U}(1)}{\text{U}(1)_{S_z} \times \text{U}(1)_{L_z, \phi}} = S^2_S \times S^2_L \times \text{U}(1)_{L_z, \phi} \quad (46)$$

として表される．ここで、 S^2_S はスピン自由度に対応する $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルの長さを 1 に保った 3 次元回転に対応し、その 2 つの回転角で張られる 2 次元球面を表す．同様に S^2_L は $\hat{\mathbf{\ell}}$ ベクトルの長さを保った 3 次元回転操作に対する秩序状態の縮退に対応する． $\text{U}(1)_{L_z, \phi}$ は位相 ϕ を回転する操作と $\hat{\mathbf{\ell}}$ ベクトル周りの回転操作とが等価であることを示しており、ゲージ・軌道対称性の破れた状態と呼ばれる [6]．具体的には、式 (43) において $(\hat{\mathbf{m}} + i\hat{\mathbf{n}})e^{i\phi} = \hat{\mathbf{m}}' + i\hat{\mathbf{n}}'$ と書き直すと、角度 ϕ の位相回転操作が $\hat{\mathbf{\ell}}$ ベクトル周りに ϕ だけ $\hat{\mathbf{m}}$ と $\hat{\mathbf{n}}$ を回転させることに等価だということに対応している．このことから、A 相では $(\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{\ell}})$ の 3 つのベクトルが空間的な構造（織目構造）を持つと、そのゲージと軌道自由度との結合のために $\hat{\mathbf{\ell}}$ ベクトルの空間構造に起因した質量流が出現する．これは所謂 Mermin-Ho 関係式として知られている [29, 30]．

しかしながら、A 相の秩序変数空間は式 (46) では未だ完全ではない．秩序変数 (43) より見て取れるように、A 相の秩序状態は $(\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}) \mapsto (-\hat{\mathbf{d}}, -\hat{\mathbf{m}}, -\hat{\mathbf{n}})$ のように実ベクトルの方向を同時に 180 度回転させても不変である．或は $(\hat{\mathbf{d}}, \phi) \mapsto (-\hat{\mathbf{d}}, \phi + \pi)$ のように $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルと同時に $\text{U}(1)$ 位相を π シフトさせることで秩序変数は不変に保たれる．このように、A 相では連続的な対称性に加えて離散的な対称性についても議論する必要がある．結果的に A 相の秩序変数空間は

$$R = S^2_S \times S^2_L \times \text{U}(1)_{L_z, \phi} / \mathbb{Z}_2 \quad (47)$$

として、 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ の離散対称性を加えた表現に拡張される．後にみるように、この離散対称性 \mathbb{Z}_2 によって A 相ではトポロジカルに整数量子渦以外にも半整数量子渦が存在し得る．この半整数量子渦はスピン偏極した Majorana 零モードを伴い、その統計性は非可換エニオン統計に従う．尚、A 相の秩序変数空間 (47) に関して $\hat{\mathbf{d}}$ で表されるスピン自由度に起因した秩序変数空間 S^2_S / \mathbb{Z}_2 は超微細スピン自由度 $F=1$ を持つ Bose-Einstein 凝縮体 (BEC) の Polar 相と等価である（厳密にはこれに $\text{U}(1)$ 位相自由度が加わる）．一方で、 $\hat{\mathbf{\ell}}$ で表される軌道自由度に起因した $S^2_L \times \text{U}(1)_{L_z, \phi}$ は $\text{SO}(3)$ と見なせるが、この秩序変数空間は $F=1$ BEC の強磁性状態と等価であり、この軌道状態を軌道強磁性状態とも呼ぶ [31, 32, 33]．

さらに $\hat{\mathbf{\ell}}$ ベクトルの示す方向は運動量空間にてギャップ関数が点状ノードを持っている方向と一致する．つまり、超流動密度は $\hat{\mathbf{\ell}}$ の方向に強く抑制されており異方的である．この超流動密度

の強い異方性は $\hat{\ell}$ ベクトルの向きに対する強い制約を課す。例えば、 $\hat{\ell}$ に平行な壁を考えると、超流動密度が壁により強く抑制される結果、凝縮エネルギーを大きく損なう。一方で、垂直な壁の場合では超流動密度が元々低下しているため影響を受けない。つまり、凝縮エネルギーという非常に大きなエネルギースケールで $\hat{\ell}$ は壁に垂直に向くべきという強い境界条件が課せられる。

A 相の秩序状態はクーパー対の軌道角運動量が特定の方向にそろっており、時間反転対称性を破っていることは自明である。しかしながら、 $\Gamma^2 = +1$ を満たす荷電共役操作に対しては依然として不変性を示す。そのため A 相の秩序状態は [16] の分類表に従うと class D に分類される。この対称性クラスは 1 次元空間では \mathbb{Z}_2 、2 次元空間では \mathbb{Z} 対称性を持つことが示されている。つまり制限空間中での ^3He -A 相はトポロジカル超流動体である。一方で、[16] の分類表では 3 次元空間ではトポロジカルで自明である。しかしながら、 $\hat{\ell}$ ベクトルが空間全体にわたってある方向にそろっているような状況では、巻き付き数が定義できる。非自明な巻き付き数は界面でのギャップレス準粒子励起の存在を保証している。実際に BdG 方程式と準古典 Eilenberger 方程式の数値計算により、A 相でもギャップレスな分散を持つ表面 Andreev 束縛状態の存在が確認された [34]。

3 準粒子束縛状態

超伝導状態の秩序変数は前説までで触れたように、少なくとも U(1) 位相の自由度を持っている。この秩序変数の位相が実空間或は運動空間中で何らかの構造を持つと、その位相構造は低エネルギー準粒子励起スペクトルに大きな影響を与える。例えば Andreev 束縛状態や量子渦束縛状態等がその典型例である。そこでこの節では超伝導秩序変数の位相が準粒子状態に与える影響を整理しておく。

3.1 s 波超伝導体における Andreev 束縛状態

簡単な例として、図 1 の様な超伝導/常伝導/超伝導 (SNS) 接合系を考える。ここで、超伝導状態は単純な s 波クーパー対状態を考えることにする。この秩序変数は式 (23) より $\Delta_{\uparrow\downarrow}^{(\ell=0, m=0)}(\mathbf{r}) = \Delta_{\uparrow\downarrow}^{(\ell=0, m=0)}(\mathbf{r}) \equiv 2\sqrt{\pi}\Delta(\mathbf{r})$ とおくことにする。数因子は便宜上加えた。さて、図 1 の様に接合面に垂直な軸を x 軸とし、左 (右) 側の超伝導領域の位相を ϕ_L (ϕ_R) とおく。ここで、接合面に平行な方向には超伝導状態の一様性を仮定しておく。また、常伝導領域の幅 L は超伝導コヒーレンス長

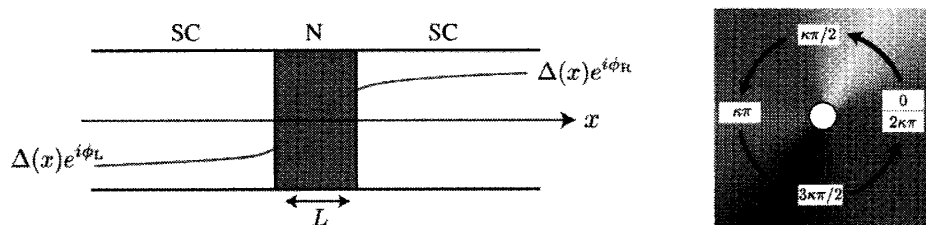


図 1: 左図は SNS 接合系の概念図。右図は渦度 $\kappa \in \mathbb{Z}$ を持つ量子渦状態での秩序変数 $\Delta_{0,0}(\mathbf{r})$ の位相を x - y 平面で描いた図。量子渦の中心 “○” は原点 $(x, y) = (0, 0)$ に配置されたとする。

ξ に比べて十分に短いものとする ($L \ll \xi$). このとき BdG 方程式 (29a) は $\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_{12})\Delta(\mathbf{r})$ とおくと

$$\begin{bmatrix} -\frac{\nabla^2}{2M} - \mu & \Delta(x)e^{i\phi(x)} \\ \Delta(x)e^{-i\phi(x)} & \frac{\nabla^2}{2M} + \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix} = E_\nu \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix} \quad (48)$$

と簡単化される. ここで, Δ が実数になるように (u, v) の位相を選んだ. また, $x < 0$ では $\phi(x) = \phi_L$ であり, $x > 0$ では $\phi(x) = \phi_R$ とする. 今はフェルミエネルギー $E_F = k_F^2/2M$ 近傍の準粒子のみに興味があるため, BdG 方程式 (48) に Andreev 近似を施そう. Andreev 近似とは準粒子波動関数 $[u_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r}), v_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r})]$ を k_F^{-1} 程度の早い長さスケールを持つ振動項と ξ 程度のゆつくりとした空間変化を表す $u(k, x)$ とに因数分解し, $k_F\xi \gg 1$ の極限をとる:

$$\begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix} = e^{ik_F x} \begin{bmatrix} u_\uparrow(k, x) \\ v_\downarrow(k, x) \end{bmatrix} \quad (49)$$

このとき BdG 方程式 (48) は 1 次元 Andreev 方程式

$$\left[-iv_F \hat{\tau}_3 \partial_x + \hat{\tau}_1 e^{-i\phi(x)\hat{\tau}_3} \Delta(x) \right] \begin{bmatrix} u_\uparrow(k, x) \\ v_\downarrow(k, x) \end{bmatrix} = E_\nu \begin{bmatrix} u_\uparrow(k, x) \\ v_\downarrow(k, x) \end{bmatrix}. \quad (50)$$

として書き直される. この式は $x=0$ において質量項に位相のとびを持つ 1 次元 Dirac 方程式と等価である [9]. この位相のとびを持つ 1 次元 Dirac 方程式は, $\Delta(x) = \Delta_0$ のとき, 簡単な解析により

$$E = \Delta_0 \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right), \quad (51)$$

というエネルギー固有値を持つことが示される [9, 35]. 特に, 左右の超伝導領域の位相差が $\phi_L - \phi_R = \pi$ のときエネルギー固有値は厳密に $E=0$ となり, その固有関数は

$$\begin{bmatrix} u_\uparrow(k, x) \\ v_\downarrow(k, x) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} e^{i\tau_3(\phi_L + \phi_R)/4} \exp(-|x|/\xi), \quad (52)$$

となり, 常伝導領域からコヒーレンス長 ξ の程度の領域に局在する状態である. この局在状態は Andreev 束縛状態と呼ばれ, 超伝導及び超流動体における様々な位相欠陥周りに出現する低エネルギー準粒子状態を理解するためには不可欠である.

3.2 *s* 波超伝導体の渦糸束縛状態: Caroli-de Gennes-Matricon 状態

ここでやはり *s* 波超伝導体の場合を考える. z 軸に沿った空間の一様性を仮定すると, 量子渦状態の秩序変数は

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(\rho) e^{i\kappa\theta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{r} = (\rho, \theta, z), \quad (53)$$

となる. 対ポテンシャル $\Delta_{\ell,m}(\mathbf{r})$ の一価性より渦度 κ は整数のみが許される. 図 1 の右から見てとれるように, 原点 $\rho=0$ において秩序変数は任意の位相をとり得る. このため位相が確定しない

位相特異点となるので、秩序変数の振幅は原点において零となる： $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta(\rho) = 0$ 。渦芯と呼ばれる $\rho = 0$ での位相特異点を横切る任意の直線経路を見てみると、渦芯を挟んだ超流動ドメインの位相差は常に $\kappa\pi$ となることから、渦芯近傍の準粒子状態は位相差 $\kappa\pi$ を持つ SNS 接合系のそれと類似しているだろう。実際に、1964 年に Caroli-de Gennes-Matricon (CdGM) [36] が渦度 $\kappa = 1$ の場合において束縛状態が存在することを明らかにした。

一般的に、任意の渦度 $\kappa \in \mathbb{Z}$ を持つ量子渦近傍に局在した CdGM 状態のエネルギー固有値は以下のように与えられる [37]：

$$E_{n,q,k} = -\left(q - \frac{\kappa}{2}\right) \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k^2/2M\mu}} + \left(n + \frac{\kappa - 1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{k^2}{2M\mu}} \omega_1, \quad n, q \in \mathbb{Z}. \quad (54)$$

ここで、 $\omega_0 \approx \frac{\kappa}{2} \frac{\Delta_0^2}{\mu}$ 及び $\omega_1 \approx \frac{\pi}{2} \Delta_0$ と見積もられる ($\Delta_0 \equiv \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta(\rho)$)。この固有関数は n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} u_{n,q,k}(\mathbf{r}) \\ v_{n,q,k}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \propto e^{iq\theta} e^{ikz} \begin{bmatrix} J_q(k_+(\alpha)\rho) \\ e^{-i\kappa\theta} J_{q-\kappa}(k_-(\alpha)\rho) \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{v_\mu} \int_0^\rho \Delta(\rho') d\rho'\right], \quad (55)$$

と表される。ここで、 $k_\pm(\alpha)$ は弱結合領域では k_F 程度となる。尚、変数等については文献 [37] か或は本稿の Appendix を参考にしてほしい。Appendix はカイラル超伝導体の CdGM 状態についての解析解であるが同様の手順で式 (54) と (55) が導かれる。

式 (55) より、量子渦芯の外側の領域 ($k_F\rho \gg 1$) において CdGM 状態の固有関数は $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos(k_F\rho) e^{-\rho/\xi}$ の様に振る舞う。即ち、この CdGM 状態は、量子渦芯から ξ 程度の半径に局在した束縛状態である。さらに強調すべき点は CdGM 状態の最低エネルギーが厳密に零にならないことである： κ が奇数の場合は $\min |E_{n,q,k}| = \omega_0/2 \approx \Delta_0^2/E_F$ 程度のエネルギーギャップが常に関く。CdGM 状態の最低エネルギーが有限になるという事実は BdG 方程式の解析によって導かれるものであり、例えば準古典 Eilenberger 理論では CdGM 状態は対関数や渦度によらずギャップレスとなる [38]。 κ が偶数の場合は $\omega_1 \approx \Delta_0$ 程度の大きなエネルギーギャップが量子渦芯で開く。これは SNS 接合系にマップして考えると、超伝導ドメイン間の位相差が 2π の整数倍になっていることから理解できる。しかし、ある程度大きな $|q|$ ではエネルギーギャップは閉じるため、最低エネルギーの CdGM 状態は渦中心周りに環状に局在することになる。

式 (54) で示された CdGM 状態は走査トンネル顕微鏡 (STM) を用いて直接的に観測することができる。1990 年頃に Hess ら [39] によって NbSe₂ の超伝導体において磁束渦糸に束縛された低エネルギー状態が初めて観測された。STM の実験では局所状態密度 $\mathcal{N}(\mathbf{r}, E) = \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{r}, E)$ を直接的に観測している。ここで便宜上、局所状態密度 $\mathcal{N}(\mathbf{r}, E)$ をスピン分解したものを定義する： $\mathcal{N}_\uparrow(\mathbf{r}, E) = \sum_\nu |u_{\nu,\uparrow}(\mathbf{r})| \delta(E - E_\nu)$, $\mathcal{N}_\downarrow(\mathbf{r}, E) = \sum_\nu |v_{\nu,\downarrow}(\mathbf{r})| \delta(E + E_\nu)$ 。 $\kappa = 1$ と $\kappa = 2$ を持つ量子渦状態での局所状態密度を図 2 に示す [37]。上の議論の通り、 $\kappa = 1$ での低エネルギー準粒子状態は渦芯に束縛されており、 $E = 0$ 近傍においてそれらのエネルギー準位に離散性が見られる。この離散性は Hayashi [40, 41] らによる BdG 方程式の数値対角化により始めて具体的に議論され、量子極限における量子渦芯近傍でのキャリアー密度の低下等の直接的な関係性が示された。

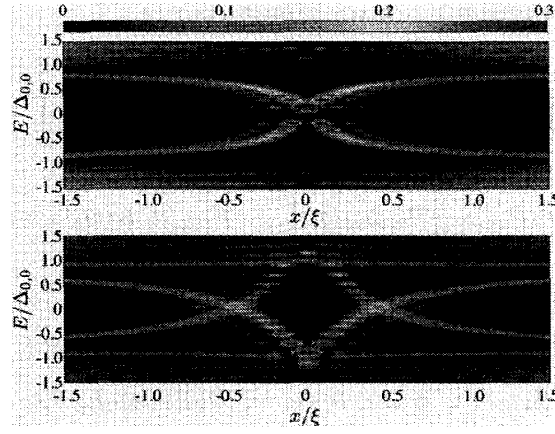


図 2: $k_F\xi=20$ での s 波超伝導体の量子渦状態での局所状態密度 (左) と常磁性磁気モーメントの空間構造 (右). 上段が $\kappa=1$, 下段が $\kappa=2$. $E=0$ はフェルミエネルギーに相当する.

式 (54) でも触れたように, $\rho=0$ の局所状態密度は $E=0$ よりも Δ_0^2/E_F 程度の正側の領域でピークを持っており, 渦糸中心では粒子的な状態密度と正孔側の状態密度が非対称になっていることがわかる [40]. この量子渦中心での状態密度の非対称性は高解像度の極低温 STM により $\text{YNi}_2\text{B}_2\text{C}$ の超伝導体において観測されている [42]. 一方で, $\kappa=2$ の渦中心では大きなエネルギーギャップが開いており, 低エネルギー準粒子状態は渦周りに環状に出現している. 通常の超伝導/超流動体の場合, $\kappa>1$ の渦糸は渦度 1 の渦糸 κ 本に分裂する [43]. しかしながら, メゾスコピック超伝導体では $\kappa>1$ の巨大な渦が安定に存在し得ることが実験的に示唆されている [44]. さらに, 冷却原子気体 BEC では超微細スピン自由度を外場により制御することでベリー位相を焼き付け, 渦度 $\kappa=2$ や 4 を持つ巨大渦の生成に実験的に成功した [45].

この局所状態密度をバンドの底からフェルミエネルギーまで積分することで絶対零度での粒子密度 $n(\mathbf{r})=n_{\uparrow}(\mathbf{r})+n_{\downarrow}(\mathbf{r})$ が得られる. Hayashi ら [41] により CdGM 状態の分散と渦芯近傍での粒子密度 $n(\mathbf{r})$ との関連性が議論され, 渦糸中心での粒子-正孔対称性の破れの帰結として渦芯での粒子密度低下が示された. 中性フェルミ原子気体系において BCS-BEC クロスオーバー領域において量子渦が実験的に観測されたが, その際に, 渦芯での粒子密度低下を介して Abrikosov 格子状態等が直接的に観測された [46].

3.3 カイラル p 波超伝導体の渦糸束縛状態

等方的なギャップ関数を持つ s 波超伝導体中の量子渦束縛状態と比較するためにも, スピン 3 重項 p 波超伝導体の量子渦を考えよう. ただし, 簡単のためスピン自由度は考えず, スピン偏極した p 波超伝導体を考える:

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}) = \Delta_{+1}(\mathbf{r}) \left(\hat{k}_x + i\hat{k}_y \right) + \Delta_{-1}(\mathbf{r}) \left(\hat{k}_x - i\hat{k}_y \right) + \Delta_0(\mathbf{r}) \hat{k}_z. \quad (56)$$

この超伝導対ポテンシャルを仮定すると, BdG 方程式 (18) は

$$\begin{bmatrix} H_0(\mathbf{r}) & \Pi(\mathbf{r}) \\ -\Pi^*(\mathbf{r}) & -H_0^*(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\nu(\mathbf{r}) \\ v_\nu(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = E_\nu \begin{bmatrix} u_\nu(\mathbf{r}) \\ v_\nu(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (57a)$$

$$\Pi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0} \sum_{m=0,\pm 1} \left[\Delta_m(\mathbf{r}) \mathcal{P}_m + \frac{1}{2} \mathcal{P}_m \Delta_m(\mathbf{r}) \right], \quad \mathcal{P}_{\pm 1} \equiv \mp (\partial_x \pm i\partial_y), \quad \mathcal{P}_0 \equiv \partial_z, \quad (57b)$$

と局所的なポテンシャル問題に簡略化される [47, 48, 49]. ただし, この BdG 方程式を簡略化するためにクーパー対のサイズが零極限の近似を行っていることに注意したい. 式 (57) は元々の BdG 方程式のエルミート性を失っていることから, その固有値 E_ν は一般に複素数となり得る. 式 (57) の非エルミート性はクーパー対のサイズを零極限近似したことに起因しており, 固有値の虚部の出現は非物理的である. 特に, 実部のエネルギー固有値が零となる場合は同時に純虚数の可能性も排除できないため, 数値計算を行う際は注意が必要である [50].

スピン偏極した p 波超伝導・超流動体は軌道自由度に起因した多成分秩序変数で表されるため, 実現可能な秩序状態も自明ではない. 具体的には, $(\Delta_{+1}, \Delta_0, \Delta_{-1}) \propto (1, 0, 0)$ となる軌道強磁性状態と呼ばれるものと $(\Delta_{+1}, \Delta_0, \Delta_{-1}) \propto (0, 1, 0)$ の極性 (ポーラー) 状態とが基底状態の候補である. 前者は時間反転対称性を自発的に破っており, カイラル状態とも呼ばれる. 3次元フェルミ球を考えると, このカイラル p 波超伝導状態はフェルミ球の北極と南極において点ノードをもち, k_x - k_y 平面において巻き数 $+1$ の位相勾配を伴う. 極性状態のギャップ関数は赤道上に線上のノードを持ち, フェルミ球の北半球と南半球では位相が π ずれている. 直接的な例は超流動 ^3He において現れる A_1 相がある. 単純な BCS 理論に従うと, 極性状態は線上にエネルギーギャップがつぶれているため, 点ノードを伴うカイラル状態に比べて凝縮エネルギーを損している. そのため, ここではカイラル超伝導体の量子渦を考えよう. なお, 極性状態のうち最も単純な $\Delta(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}) = \Delta_0(\mathbf{r})\hat{k}_z$ の量子渦は s 波超伝導体の CdGM 解において $\Delta \rightarrow \Delta k_z/k_F$ とおき直すことで得られる.

さて, この軌道強磁性状態の量子渦周りの準粒子励起を考えてみる: $\Delta_{+1}(\mathbf{r}) = \Delta_{+1}(\rho)e^{i\kappa\theta}$. 弱結合極限 $k_F\xi \approx E_F/\Delta \gg 1$ では, 3.2 節での s 波超伝導体量子渦の CdGM 状態の分散が以下のように変更される [48, 49, 50, 51]:

$$E_{n,q,k} = -\left(q - \frac{\kappa+1}{2}\right) \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k^2/2M_\mu}} + \left(n + \frac{\kappa-1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{k^2}{2M_\mu}} \omega_1, \quad (58)$$

ここで, $\omega_{0,1}$ は式 (54) におけるそれらと同等である. このとき固有関数は, q 次の Bessel 関数 $J_q(z)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} u_{n,q,k}(\mathbf{r}) \\ v_{n,q,k}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathcal{N} e^{iq\theta} e^{ikz} \begin{bmatrix} J_q(k+\rho) \\ J_{q-\kappa+1}(k-\rho) e^{-i(\kappa-1)\theta} \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{v_\mu} \int_0^\rho \Delta(\rho') d\rho'\right], \quad (59)$$

となる. 詳細については Appendix を参照されたい. \mathcal{N} は規格化因子であり, $k_\pm \equiv k_\mu \pm M E_{\ell,n}/k_\mu$ とした. 式 (58) と s 波での結果 (54) との違いは右辺第 1 項であり, この結果として, 軌道強磁性状態での量子渦束縛状態は

$$q = \frac{\kappa+1}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (60)$$

を満たす場合に厳密に零エネルギーを持つことがわかる. $q \in \mathbb{Z}$ の要請より, 渦度 κ が奇数の場合にのみエネルギー固有値が厳密に零になり得る. さらに, 式 (58) より, 零エネルギー固有状態は k に対する分散を持たないフラットバンドを示すことがわかる [34].

Tewari ら [52] は Andreev 近似が成立する様な弱結合領域 $k_F \xi \gg 1$ において, 量子渦状態の BdG 方程式 (10) が質量項を伴う 1 次元 Dirac 方程式 (厳密には Majorana 方程式) へマップできることを示した. さらに, 渦度 κ が奇数のときには位相差 π を持つ SNS 接合系の BdG 方程式 (50) へ完全にマップすることができる. 一方で, 渦度 κ が偶数のときは符号変化を伴わない質量項を持つ 1 次元 Dirac 方程式と等価になり, CdGM 状態には有限のギャップが開く.

式 (58) は弱結合極限 $k_F \xi \approx E_F / \Delta \gg 1$ での結果であるが, Andreev 近似が適用できないような強結合極限における量子渦束縛状態について触れておきたい. 式 (54) で導出したような CdGM 状態の分散を Andreev 近似無しで解析的に求めることは難しい問題である. そこで Gurarie-Radzihovsky (GR) [53] はあらかじめ零エネルギー固有値 $E = 0$ の存在と対称性に基づく固有関数の性質

$$u_{E=0}(\mathbf{r}) = v_{E=0}^*(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{N} f_0(\rho) e^{i(\kappa+1)\theta/2}, \quad (61)$$

を仮定 (Ansatz) することで, 零エネルギー固有状態の解を任意のパラメータ Δ/E_F と μ に対して求めることに成功した. 結論として, $\mu > 0$ を満たす限り常に量子渦束縛状態の最低エネルギーは厳密に零となることが示された. 彼らの結論を紹介するために便利なパラメータ $k_\mu \xi$ を導入する. ここで $k_\mu = \sqrt{2M\mu}$ は化学ポテンシャルから定義される長さスケールである. $k_\mu \xi \approx k_F \xi \gg 1$ は弱結合極限に対応し, $k_\mu \xi = 0$ はトポロジカル相転移点を示す [54]. 渦芯での秩序変数の空間変化を無視するロンドン近似 ($\Delta(\rho) = \Delta$) を適用すると, 零エネルギー状態の固有関数 (59) は $k_\mu \xi > 1$ では

$$f_0(\rho) = J_{\frac{\kappa+1}{2}} \left(\frac{k_\mu \rho}{\sqrt{1 - (k_\mu \xi_0)^{-2}}} \right) e^{-\rho/\xi}, \quad (62)$$

となり k_F^{-1} 程度の量子振動を伴う. $k_\mu \xi < 1$ では変形ベッセル関数 I_q を用いて,

$$f_0(\rho) = I_{\frac{\kappa+1}{2}} \left(\frac{k_\mu \rho}{\sqrt{(k_\mu \xi_0)^{-2} - 1}} \right) e^{-\rho/\xi}, \quad (63)$$

となる. 式 (62) と (63) に現れている指数関数因子は零エネルギー固有状態が束縛状態であることを示しているが, $I_q(x)$ の $x \gg 1$ での指数関数的発散により相殺される. つまり, トポロジカル相転移近傍 $0 < k_\mu \xi_0 < 1$ では零エネルギー準粒子状態は渦芯束縛状態ではなく, 系全体に広がりを持つ. ただし, GR の解析では秩序変数の空間的な一様性を仮定しているという点で不完全である. 文献 [48, 49] では広範囲なパラメータ領域において BdG 方程式 (10) とギャップ方程式の自己無撞着な計算が実行され, トポロジカル相転移点近傍における零エネルギー Ansatz に基づく GR の解析は定性的に正しいことが示された.

3.4 カイラル $|\ell| \geq 1$ 波超流動での表面束縛状態

非 s 波超伝導体では、運動量空間におけるギャップ関数の位相構造を反映して超伝導体表面や界面に束縛状態が出現する。これも CdGM 状態と同様に Andreev 束縛状態として理解されるが、同時にバルクで定義される非自明なトポロジカル不変量を反映している（バルク・エッジ対応）。ここでは簡単のために、カイラル $|\ell| \geq 1$ 波超流動での表面束縛状態を考えよう。そのためにスピン自由度を含む BdG 方程式 (18) から出発する：

$$\int d\mathbf{r}_2 \begin{bmatrix} \delta(\mathbf{r}_{12})h(\mathbf{r}_2) & \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -\hat{\Delta}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & -\delta(\mathbf{r}_{12})h(\mathbf{r}_2) \end{bmatrix} \varphi_\nu(\mathbf{r}_2) = E_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r}_2). \quad (64)$$

さて、超伝導体の表面を考える為に Andreev 近似を導入する。尚、表面では鏡面反射のみを考えることにする。式 (10) に現れる準粒子波動関数 $\varphi_\nu(\mathbf{r})$ を ξ 程度のゆっくりとした空間変化を表す $\tilde{\varphi}$ と $k_F^{-1} \ll \xi$ 程度の振動因子とに分解する：

$$\varphi_\nu(\mathbf{r}) = C_+ \tilde{\varphi}_+(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_F, + \cdot \mathbf{r}} - C_- \tilde{\varphi}_-(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_F, - \cdot \mathbf{r}}. \quad (65)$$

これを BdG 方程式 (10) へ代入すると、Andreev 方程式が得られる：

$$[-iv_{F,\pm} \cdot \nabla \mathcal{I}_z + \underline{\Delta}(\mathbf{k}_{F,\pm}, \mathbf{r})] \tilde{\varphi}_\pm(\mathbf{r}) = E \tilde{\varphi}_\pm(\mathbf{r}). \quad (66)$$

なお、 $v_{F,\pm} = v_F \hat{\mathbf{k}}_{F,\pm}$ はフェルミ速度であり、対ポテンシャル $\underline{\Delta}(\hat{\mathbf{k}}_{F,\pm}, \pm)$ は

$$\underline{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \underline{\Delta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \approx \underline{\Delta}(\mathbf{k}_F, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \hat{0} & \hat{\Delta}(\mathbf{k}_F, \mathbf{r}) \\ \hat{\Delta}^*(\mathbf{k}_F, \mathbf{r}) & \hat{0} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

簡単のために、対ポテンシャルの空間変化は無視することにする。

問題を具体的にするために、壁を $\mathbf{r} = (x, y=0, z)$ に置き、壁に垂直な軸を y 軸とする。 x 及び z 軸に沿って一様な系を考え、壁 $\mathbf{r} = (x, y=0, z)$ での境界条件を $\varphi(\mathbf{r})=0$ とする。そのとき準粒子の波数ベクトルを $\mathbf{k}_{F,\pm} = k_F(\sin\theta \cos\phi, \pm \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ と書くことにする。このような状況では Andreev 方程式 (66) は 1 次元問題へ簡単化される：

$$[\mp iv_F \sin\phi \sin\theta \partial_y \mathcal{I}_z + \underline{\Delta}(\pm\phi, \theta)] \tilde{\varphi}_\pm(y) = E \tilde{\varphi}_\pm(y). \quad (68)$$

さて、カイラル ℓ 波超伝導体 ($|\ell| \geq 1$) の Andreev 束縛状態について考えよう。このギャップ関数は一般に

$$\Delta(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}) = D(\theta) \left(\hat{k}_x + i \text{sgn}(\ell) \hat{k}_y \right)^{|\ell|} = \tilde{D}(\theta) e^{i\ell\phi}, \quad \tilde{D}(\theta) \equiv D(\theta) \sin^{|\ell|} \theta, \quad (69)$$

と与えられる。ここからは簡単のためにスピン自由度を無視しよう。また、 $D(\theta)$ は任意の θ 依存性、すなわち k_z 依存性を含んでいるものとする。このような状況に対して Andreev 方程式 (66) は以下のようになる：

$$[\mp iv_F \sin\phi \sin\theta \partial_y \hat{\sigma}_z + \tilde{D}(\theta) \hat{\sigma}_x e^{\mp i\hat{\sigma}_z \ell \phi}] \tilde{\varphi}_\pm(y) = E \tilde{\varphi}_\pm(y). \quad (70)$$

Stone-Roy [35] の方法に従い、古典的な軌跡に沿った座標系 \tilde{y}_\pm を導入する： $\tilde{y}_\pm \equiv \pm \frac{y}{v_F \sin \phi \sin \theta} = \frac{y}{v_F \sin(\pm \phi) \sin \theta}$ 。この座標系を用いると y 軸に対する空間微分項は $\pm v_F \sin \theta \sin \phi \partial_y = \partial_{\tilde{y}_\pm}$ となり、故に Andreev 方程式 (70) は

$$\left[-i \partial_{\tilde{y}_\pm} \hat{\sigma}_z + \tilde{D}(\theta) \hat{\sigma}_x e^{\pm i \hat{\sigma}_z \ell \phi} \right] \tilde{\varphi}_\pm(\tilde{y}_\pm) = E \tilde{\varphi}_\pm(\tilde{y}_\pm), \quad (71)$$

として書き直される。

導入された座標系 \tilde{y}_\pm を 1 次元座標 ρ に対応させる：つまり、 $\tilde{y}_+ \mapsto \rho > 0$, $\tilde{y}_- \mapsto \rho < 0$ とする。この新しい 1 次元座標系 ρ を用いることで、Andreev 方程式 (71) は質量ドメインを伴う 1 次元 Dirac (Majorana) 方程式

$$\left[-i \partial_\rho \hat{\sigma}_z + \tilde{D}(\theta) \hat{\sigma}_x e^{-i \hat{\sigma}_z \vartheta(\rho)} \right] \psi(\rho) = E \psi(\rho), \quad (72)$$

に帰着される。ここで、

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_+(\rho) & \text{for } \rho > 0 \\ \tilde{\varphi}_-(\rho) & \text{for } \rho < 0 \end{cases}, \quad \vartheta(\rho) = \begin{cases} \phi_R \equiv \ell \phi & \text{for } \rho > 0 \\ \phi_L \equiv -\ell \phi & \text{for } \rho < 0 \end{cases}, \quad (73)$$

として定義した。以下では、 $\phi_L - \phi_R \in [0, 2\pi]$ の範囲の中で Dirac 方程式 (72) の解析解を示す。

まずは Dirac 方程式 (72) の零エネルギー固有値の分布に対する指数定理を示しておく。Jackiw と Rebbi [55] は質量項を伴う 1 次元 Dirac 方程式において零エネルギー固有値の存在を議論し、質量項の位相が $(2n-1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) シフトするようなキंक状態において厳密に零エネルギー固有値が 1 つ存在することを示した。この指数定理に従うと、カイラル ℓ 波超伝導体に対する Dirac 方程式 (72) の零エネルギー固有状態は

$$\phi_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{|\ell|} \in [0, \pi], \quad (74)$$

を満たす ϕ 即ち k_x において現れることがわかる。この零エネルギー固有状態の数は n の取り得る値で決まっており、上式より直ちに $n=1, 2, \dots, |\ell|$ となることがわかる。結局、カイラル ℓ 波超伝導体の Andreev 束縛状態は ℓ 個の波数 $\hat{k}_x^{(n)}$ においてギャップレス分散を持つことが示される：

$$\hat{k}_x^{(n)} = \cos \phi_n \sin \theta = \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{|\ell|} \right] \sin \theta, \quad n = 1, 2, \dots, |\ell|. \quad (75)$$

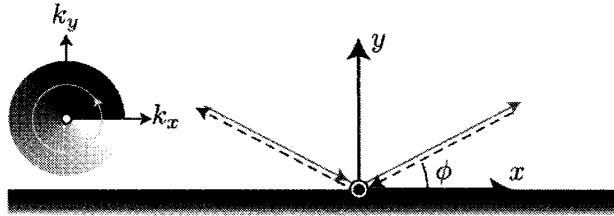


図 3: 超伝導体表面近傍の概念図と運動量空間での対関数。カラーマップは対関数の位相を表し、0 (暗) から $2\ell\pi$ (明) に対応する。超伝導体表面近傍の電子 (実線) は表面において鏡面反射し、超伝導体内部では正孔 (点線) とともに Andreev 反射される。

Dirac 方程式 (72) は一般に束縛状態 $E < \tilde{D}(\theta)$ と散乱状態 $E > \tilde{D}(\theta)$ に対して解くことができる。ここでは束縛状態のみに興味があるが、一般的なエネルギー固有値とその固有関数については文献 [35] の Appendix が詳しい。カイラル ℓ 波超伝導体の Andreev 束縛状態のエネルギー分散は 2 つの超伝導ドメイン間の位相差 $\phi_R - \phi_L$ に依存し、

$$E(\mathbf{k}) = \tilde{D}(\theta) \cos \frac{\phi_L - \phi_R}{2}, \quad \phi_L - \phi_R \in [0, 2\pi], \quad (76)$$

と与えられる。例としてカイラル p 波超伝導体 ($\ell = \pm 1$) を考えよう。 $\phi_R - \phi_L \in [0, 2\pi]$ に注意すると、各ドメインの位相は

$$\phi_R = 2\phi, \quad \phi_L = \begin{cases} \pi - \phi & \phi \in [0, \pi/2] \\ 2\pi - \phi & \phi \in [\pi/2, \pi] \end{cases}, \quad (77)$$

と与えられる。すなわち、

$$E(\mathbf{k}) = -\text{sgn}(\ell) \Delta \frac{k_x}{k_F}, \quad (78)$$

となり、ドメインに垂直な波数 k_x に対して線形な分散を持つ一方で、ギャップ関数 ($k_x \pm ik_y$) よりポイントノードの方向 k_z に沿って分散がないことに注意したい。つまり、ギャップレスな分散は k_z 方向に沿ってフラットバンドを構成する [34]。式 (78) に対応するエネルギー固有状態の固有関数は

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\Delta}{2v_F}} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \sin(k_{\perp} y) e^{-y/\xi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

で与えられ、表面 $y=0$ からコヒーレンス長 ξ 程度の長さスケールで局在する。ただし、 $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, z)$, $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_z)$, $k_{\perp} = k_y$ とした。

$\ell=2$ のカイラル d 波超伝導体 ($k_x + ik_y$)² の場合も同様にして Andreev 束縛状態の分散が計算される。 $\ell = \pm 1$ の場合と同様にして、

$$\phi_R = 2\phi, \quad \phi_L = \begin{cases} 2\pi - 2\phi & \phi \in [0, \pi/2] \\ 4\pi - 2\phi & \phi \in [\pi/2, \pi] \end{cases}, \quad (80)$$

とおくと、Andreev 束縛状態のエネルギー分散は

$$E(\mathbf{k}) = -\text{sgn}(k_x) \frac{|\Delta|}{k_F^2} (2k_x^2 - k_F^2), \quad (81)$$

となることがわかる。

4 現実的な系

前節にて、Andreev 束縛状態が超伝導・超流動体における量子渦や異方的超伝導体の表面に現れる束縛状態を理解するための共通的な概念であることをみてきた。この節では、具体的な系と

して超流動 ^3He を考えて、その量子渦及び表面 Andreev 束縛状態が出現する状況について詳しく述べたい。2.4 節で触れたように、液体 ^3He は非常に高い対称性を保った系であり、スピン 3 重項超流動研究を行なう上で教科書的物質である。

4.1 *p* 波超流動体における半整数量子渦状態

A 相の秩序変数は式 (43) で与えられているが、これを量子渦状態へ拡張しよう： $d_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Delta(\rho)e^{i\kappa\phi}\hat{d}_\mu(\hat{m}_\nu + \hat{n}_\nu)\hat{k}_\nu$ 。ここで、重心座標に対しては円筒座標系を用いた： $\mathbf{r}=(\rho, \phi, z)$ 。 κ は渦度を表すパラメータであり、秩序変数 $d_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ の一価性によりその取り得る値は制限される。自明な超伝導体（例えば *s* 波超伝導体）の場合は渦度は整数値しか許されない： $\kappa \in \mathbb{Z}$ 。しかしながら、A 相ではスピン自由度に起因して、 κ は整数以外の値も取り得る。

このことを観るために、図 3 左に示されるような狭い容器に閉じ込められた回転超流動 ^3He -A を考え、その軌道自由度を $\hat{k}_x + i\hat{k}_y$ に固定する。この軌道強磁性状態（カイラル状態）はサブミクロン程度の厚さの試料に ^3He を閉じ込めることで実現される。2.4.2 節で触れたように、壁との強い境界条件のために $\hat{\ell}$ は常に壁に垂直な方向に固定される。便宜上、壁に平行に強い磁場 ($H \gg H_D$) をかけて、 \hat{d} ベクトルを *x-y* 面内に制限しておく。2.4.2 節で触れたように、磁気的雙極子相互作用は $\hat{\ell} \parallel \hat{d}$ の状況を好む。しかしながら、雙極子相互作用エネルギーの長さスケールは $10\mu\text{m}$ 程度と比較的長い。つまり、サブミクロン程度の厚さの試料では $\hat{\ell}$ ベクトルは常に壁に垂直に固定されており、空間変化はエネルギー的に許されない。このときの A 相の秩序変数は

$$d_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Delta(\rho)e^{i\kappa\phi}\hat{d}_\mu(\hat{k}_x + i\hat{k}_y), \quad (82)$$

となる。

さて、A 相の秩序変数空間は 2.4.2 節で触れたように、離散対称性 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ を用いて表現される。この離散対称性は $U(1)$ 位相を π ずらす操作と \hat{d} ベクトルを π 回転させる操作を同時に行なうことで、A 相秩序変数 (43) が不変であるということを表す。つまり、渦度を半整数値 $\kappa \in \mathbb{Z}/2$ とすると因子 $e^{i\kappa\phi}$ より $\phi = 0, 2\pi$ において必ず“とび”が生じるが、同時に \hat{d} ベクトルを π 回転させることで、その不連続性を吸収し秩序変数の一価性を保つことができる。半整数量子渦と呼

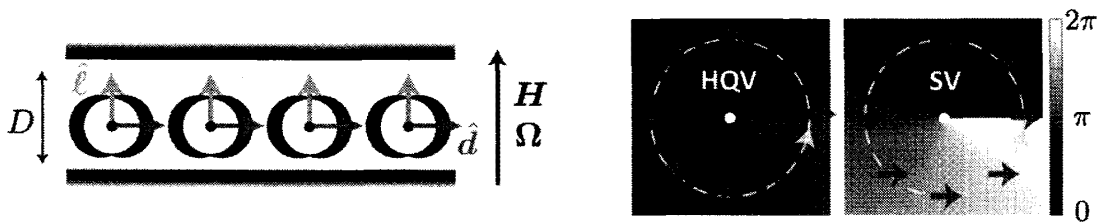


図 4: (左) 厚さ D の容器中に閉じ込められた超流動 ^3He -A の概念図。双極子磁場よりも大きな磁場 $H \gg H_D \sim 20\text{G}$ を容器に垂直にかけ、さらに、その容器を回転 (Ω) することで整数或いは半整数量子渦が生成される。厚さ D は双極子相互作用エネルギーの長さスケールは $10\mu\text{m}$ よりも十分狭いとする。右図は半整数量子渦 (HQV) と整数量子渦 (SV) の $U(1)$ 位相と \hat{d} ベクトル (矢印) の空間構造。

ばれるこの渦構造は Volovik-Mineev [56] により初めて指摘され、現在に至るまでその実験的観測が様々な超伝導・超流動系において試みられている。半整数量子渦状態の秩序変数は式 (82) において例えば、

$$\kappa = +\frac{1}{2}, \quad \hat{\mathbf{d}} \mapsto \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) = \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \right), \quad (83)$$

とすれば良い [57, 58, 59, 60]。この空間構造については図 3 右を参照。因に、渦度 κ は質量流に関連しており、一方で $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルの巻き数はスピン流を生み出す。半整数量子渦は質量流が通常の整数渦の半分であり、同時にスピン流が渦周りに存在する。質量流とスピン流の速度場 v_{mass} , v_{spin} はいずれも量子渦中心で“芯”を持ち、遠方では $1/\rho$ で減衰する。

z 軸をスピン量子化軸とする表示で半整数量子渦状態の対ポテンシャルを書き直すと、

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \Delta(\rho)(\hat{k}_x + i\hat{k}_y), \quad (84)$$

となる。つまり、2つのスピンセクターに完全に分離することができ (Equal spin pairing 状態), $\Delta_{\uparrow\uparrow}$ は渦がない状態である。その結果、 \uparrow スピンセクターでの準粒子励起はバルク A 相のそれと等価である。一方で、 $\Delta_{\downarrow\downarrow}$ は整数渦状態であると見なせる。半整数量子渦状態での低エネルギー準粒子励起は実質的にスピン偏極したカイラル p 波超流動体の量子渦のものと等価であり、そのため、 \downarrow スピンセクターでは厳密に零エネルギーを持つ準粒子励起が存在する。半整数量子渦に束縛されたスピン偏極した零エネルギー準粒子は Majorana 零モードと見なすことができ、半整数量子渦の統計性を非可換にする [61]。これについては 5.2 節にて触れる。

一方で、依然として、式 (82) において渦度を整数とすることも可能である。整数量子渦と呼ばれるこの渦は例えば $\kappa = +1$, $\hat{\mathbf{d}} = (1, 0)$ と与えられる (図 3 右)。半整数量子渦の議論を拡張すると、この渦状態は $\Delta_{\uparrow\uparrow}$ と $\Delta_{\downarrow\downarrow}$ とともに整数量子渦を持った状態であるといえる [58, 59, 60]。そのため、整数量子渦には渦芯に束縛された零エネルギー準粒子が必ず存在するが、半整数量子渦のそれと異なり、スピン縮退している。そのため整数量子渦は非可換統計性に従わない [60]。

サブミクロン程度の厚さの試料に超流動 ^3He を閉じ込めて回転させると質量流を伴う量子渦が生成される。しかしながら、整数量子渦と半整数量子渦の熱力学的安定性を定量的に議論することは非常に難しい問題である。例えば、 $\rho \lesssim \xi$ 程度の渦芯の情報を無視した所謂 London 近似を考えよう。ここで、 $\Delta(\rho) = \Delta$ とする。質量流及びスピン流を伴う超流動速度場は v_{mass} , v_{spin} はいずれも $1/\rho$ で減衰する。この速度場に起因して、質量流及びスピン流によるエネルギーは Ginzburg-Landau 理論の範囲内において

$$F_{\text{mass,spin}} \equiv \frac{1}{2} \int \rho_{\text{mass,spin}} v_{\text{mass,spin}}^2 d\mathbf{r} = \frac{4\pi N_{\text{mass,spin}}^2}{m} \rho_{\text{mass,spin}} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right). \quad (85)$$

ここで、 ρ_{mass} , ρ_{spin} は超流動質量流及びスピン流密度を表し、 R は試料の半径である。つまり、速度場の $1/\rho$ の減衰に起因して、量子渦のエネルギーは質量流及びスピン流ともに対数発散する。式 (85) に現れる変数 N_{mass} , N_{spin} はそれぞれ $U(1)$ 位相と $\hat{\mathbf{d}}$ ベクトルの巻き数を表しており、式

(84) で表される半整数量子渦では $(N_{\text{mass}}, N_{\text{spin}}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 整数量子渦では $(N_{\text{mass}}, N_{\text{spin}}) = (1, 0)$ である。

式 (85) から指摘できることは以下の通りである：まず、渦のエネルギー $F_{\text{mass,spin}}$ は巻き数の2乗に比例しているので、量子渦1本と比較すると半整数渦がエネルギー的に安定になる。しかしながら、試料の回転速度を上げていくにつれて質量流を獲得するために半整数渦が2本の状態が整数量子渦1本とエネルギー的に競合する。式 (85) から明らかなように、半整数渦2本が1本の整数量子渦に比べて熱力学的に安定化するための条件は $\rho_{\text{spin}} < \rho_{\text{mass}}$ である。これは超流動 ^3He では一般的に満たされている関係式であり、そのため、制限空間中の回転超流動 $^3\text{He-A}$ では半整数量子渦の存在が期待される [57]。しかしながら、この理論は渦芯の存在を無視しているという点で不完全である。Kawakami ら [58, 59, 60] は渦芯を考慮したより精密な理論を用いて熱力学的安定性を議論し、量子渦芯近傍ではスピン揺らぎのフィードバックに起因した強結合効果が半整数量子渦を相対的に不安定化させる働きがあることを見いだした。この計算結果により、半整数量子渦の熱力学的安定性は自明な問題ではなくなった。実際に、制限空間中の回転超流動 $^3\text{He-A}$ において半整数量子渦を探す実験的試みがなされているが、半整数量子渦の直接的な証拠は得られていない [62]。Yamashita らの実験 [62] では $10\mu\text{m}$ 程度の厚さの試料を用いて、さらにバルクで A 相が安定するような比較的高圧下において回転実験が行なわれた。しかしながら、Kawakami らの理論によると高圧領域ではむしろ強結合効果が重要となり、半整数量子渦は整数量子渦に対して相対的に不安定化する傾向がある。半整数量子渦を観測するための最適な状況は、サブミクロン程度の厚さの試料を用いて、さらに強結合効果が弱くなる零圧力で回転実験を行なうことである。尚、Kawakami らを含む半整数量子渦の熱力学的安定性に関する理論のほとんどは Ginzburg-Landau 理論に基づいており、よりミクロな理論に基づく解析が将来の問題として残されている。

以上は電荷を持たないカイラル p 波超流動体での議論であるが、その熱力学的安定性はカイラル p 波超伝導体でのそれと定性的に異なる。一般に、超伝導体に一樣磁場をかけると磁束量子渦が生成されるが、磁束量子渦周りに流れる質量流（電流）には遮蔽効果が働くことでその速度場 v_{mass} は磁場侵入長 λ 程度で指数関数的に減衰する。一方のスピン流に対しては遮蔽効果は働かず、遠方では依然として $1/\rho$ で減衰する。この振る舞いの違いにより、質量流に起因した量子渦のエネルギーは $F_{\text{mass}} \propto \ln(\lambda/\xi)$ となるが、スピン流については依然として対数発散を持つ： $F_{\text{spin}} \propto \ln(R/\xi)$ 。このように、遮蔽効果は半整数量子渦に対して不利に働くため、超伝導体では半整数量子渦は安定しにくい。カイラル p 波超伝導体で半整数量子渦を安定化させるための条件は以下の通りである [63]：(i) メゾスコピックな試料を準備する、つまり、試料半径 R を λ 程度に抑える。或いは、(ii) スピン流が逆向きの2対の半整数量子渦を考えると、お互いのスピン流が遠方では相殺し合い、スピン流のエネルギーの対数発散を抑えることができる。実際に、近年、メゾスコピックなサイズの環状の超伝導体 Sr_2RuO_4 において、半整数量子渦の存在を示唆する実験結果が報告されている [64]。

以上のマクロな Ginzburg-Landau 理論に基づく解析から、半整数量子渦の熱力学的安定性を決定する重要なファクターはフェルミ液体補正 $\rho_{\text{mass}}/\rho_{\text{spin}}$ [57]、スピン揺らぎのフィードバックに

起因した強結合効果 [58, 59, 60], 及びスピン流のエネルギーの対数発散 [63] 等が挙げられる。しかしながら, Vakaryuk-Leggett [65] は粒子数保存を満たすように拡張された BCS 変分関数を用いた計算により, 半整数量子渦の場合には微少だが自発的に磁気モーメントが生じることを指摘した。半整数量子渦の秩序変数は2つのスピンセクターに分離することができ, 各々の渦度は異なるということ在先述した。この渦度の違いに起因して, スピンセクター間には運動エネルギーの差が生じる。この運動エネルギーの差のためにスピンセクター間の相対的な粒子数比が不均衡となり, マクロな磁化が生じる。整数量子渦ではこのような磁化は生じないため, Vakaryuk-Leggett のシナリオは有限磁場効果が半整数量子渦を相対的に安定化させる傾向があることを示唆している。

4.2 p 波超流動体 ^3He における表面束縛状態

4.2.1 表面束縛状態：A 相

超流動 ^3He における表面束縛状態について考えよう。 ^3He での代表的な超流動相には A 相と B 相とがある。しかしながら, 4.1 節にて触れたように, A 相は独立な2つのスピン偏極したカイラル p 超流動体に分けることができる。そのため, 表面束縛状態の性質はスピン偏極したカイラル p 超流動体のそれと同じである。つまり, 式 (43) の秩序変数を想定し, 壁に垂直な軸を y 軸とすると, 表面 Andreev 束縛状態のエネルギー分散は式 (81) より

$$E(\mathbf{k}) = -\text{sgn}(k_x) \frac{|\Delta|}{k_F^2} (2k_x^2 - k_F^2), \quad (86)$$

となる。式 (43) より明らかなように, A 相のエネルギーギャップは k_z 方向にギャップレス (点ノード) であり, その方向では超流動密度が低下している。ただし, ギャップレスな分散を持つ表面 Andreev 束縛状態が出現するのは点ノードの方向が壁に平行な場合のみであるということに注意してほしい。節で触れたように, 点状ノードの方向 ($\parallel \hat{\ell}$) が壁に垂直な場合では壁での散乱を通して準粒子は対ポテンシャルの符号変化を感じず, 表面 Andreev 束縛状態も出現しない。超流動 ^3He A 相において表面 Andreev 束縛状態を観測するためには厚さがサブミクロン程度の薄い試料に閉じ込める必要がある [34]。

尚, 分散 (86) はスピン成分に依存せず同じ線形分散で表され, 表面に束縛された準粒子は同じ群速度 $v_x = \partial E / \partial k_x < 0$ を持つ。つまり, A 相の端では表面束縛状態に起因した有限の質量流が自発的に流れていることが期待される。具体的に表面束縛状態のエネルギー固有状態 ($|E| < \Delta$) だけでなく連続状態 ($|E| > \Delta$) を含む全ての固有状態の寄与から角運動量を計算すると, ちょうど $N/2$ となる (N は全粒子数) [35]。興味深いことに, この角運動量の値は N 個の ^3He 原子が全て角運動量 $+1$ を持つクーパー対状態 $k_x + ik_y$ を形成したときの角運動量の総和と等価である。質量流と軌道角運動量の総和の関連性は異方的超流動体における固有角運動量のパラドックスとも深く関わっていると思われる [66]。

4.2.2 表面束縛状態：B 相

次に、B相の表面 Andreev 束縛状態について具体的に計算してみる。B相の秩序変数は $SO(3)_{L-S}$ の回転軸 \hat{n} と回転角 φ を用いて一般的に式 (36) として表現される。秩序変数となる \hat{n} と φ は ^3He 原子間に働く磁気的雙極子相互作用により決定されるのだが、ここではまず、 \hat{n} と φ については任意性を残したまま、任意の方向に掛けられた磁場 \mathbf{H} のもとでの表面束縛状態の分散を求めてみよう。

便宜上、壁に垂直な方向を z として、鏡面反射な壁を $z=0$ におくことにする。そのときの Andreev 方程式は式 (66) より

$$[\mp iv_F \cos \theta \partial_z \tau_z + \underline{v} + \underline{\Delta}(\mathbf{k}_{F,\pm}, \mathbf{r})] \tilde{\varphi}_{\pm}(z) = E \tilde{\varphi}_{\pm}(z), \quad (87)$$

となる。ただし、 $\mathbf{k}_{F,\pm} = k_F(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \pm \cos \theta)$ であることに注意。また、式 (87) にて現れる \underline{v} は一様磁場 \mathbf{H} による Zeeman エネルギー $\underline{v} = -\mu_B H_\mu \text{diag}(\hat{\sigma}_\mu, -\hat{\sigma}_\mu^*)$ に対応する。

Andreev 方程式 (87) に含まれる対ポテンシャル $\underline{\Delta}$ は $SO(3)_{S-L}$ の回転行列 $R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi)$ を含んでおり、複雑な形をしている。しかしながら、回転行列の性質 $R_{\mu\nu} R_{\eta\nu} = R_{\nu\mu} R_{\nu\eta} = \delta_{\mu\eta}$ を用いることで、Andreev 方程式 (87) は以下のような簡単な形式へ変換される：

$$[-iv_F \cos \theta \partial_z \tau_z - \mu H \hat{\ell}_\mu(\hat{n}, \varphi) \tilde{\sigma}_\mu \tau_0 + \Delta_\mu(z) \tilde{\sigma}_\mu \hat{k}_\mu \tau_x] \Phi_{\mathbf{k}}(z) = E \Phi_{\mathbf{k}}(z). \quad (88)$$

ここで、 $\mathbf{k} = k_F(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ 、 $\mu = x, y, z$ 等とした。式 (88) において回転行列 $R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi)$ と外部磁場 H_μ を関連づけるベクトル $\hat{\ell}_\mu(\hat{n}, \varphi) \equiv H_\nu R_{\nu\mu}(\hat{n}, \varphi)/H$ とスピン演算子 $\tilde{\sigma}_\mu \equiv \tilde{\sigma}_\mu(\hat{n}, \varphi) = \sigma_\nu R_{\nu\mu}(\hat{n}, \varphi)$ を導入した。これらは Volovik [25] により導入されたものであり、特に $\hat{\ell}_\mu$ の定義は A 相における $\hat{\ell}$ ベクトルとは異なるので注意が必要である。さて、Andreev 方程式 (88) を解析的に計算するために、スピン演算子 $\tilde{\sigma}_\mu$ を σ_μ に変換するユニタリー変換 \mathcal{U} を導入しよう： $\sigma_\mu = \mathcal{U} \tilde{\sigma}_\mu \mathcal{U}^\dagger$ 、 $\mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger = \tau_0$ 。さらに、ユニタリー行列 $\mathcal{M} \equiv (\tau_0 \sigma_x e^{i\vartheta \sigma_z} + \tau_z \sigma_z e^{i\vartheta \sigma_z}) \mathcal{U} / \sqrt{2}$ (ただし、 $\vartheta = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}$) を導入すると、式 (88) は

$$[-iv_F \cos \theta \partial_z \tau_z - \mu H \hat{\ell}_\mu(\hat{n}, \varphi) \sigma'_\mu \tau_0 - \Delta_\perp \cos \theta \sigma_z \tau_x - \Delta_\parallel \sin \theta \sigma_0 \tau_y] \mathcal{M} \Phi_{\mathbf{k}}(z) = E \mathcal{M} \Phi_{\mathbf{k}}(z), \quad (89)$$

となる。ここで、便宜上 $\sigma' = [-\sigma_z \sin \phi + \sigma_y \cos \phi, \sigma_z \cos \phi + \sigma_y \sin \phi, \sigma_x]$ 、 $\Delta_\perp \equiv \Delta_z$ 、 $\Delta_\parallel \equiv \Delta_x = \Delta_y$ を導入した。

磁場がない場合、 $H=0$ 、式 (89) は2つのスピンセクターに対して部分対角化されている：

$$\eta_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, -i, 0]^T, \quad \eta_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, 0, i]^T. \quad (90)$$

ただし、スピン量子化軸は $\hat{\sigma}_z$ を対角化する表示として選んだ。結果的に得られる各スピンセクターにおける Andreev 方程式はスピン偏極したカイラル p 波超伝導体における (3.4 節を参照) それと等価になる。 $z=0$ での鏡映反射の境界条件 $\Phi(z=0)=0$ より、表面 Andreev 束縛状態のエネルギー分散が直ちに求まる：

$$E^{(0)}(k_x, k_y) = \pm \frac{\Delta_0}{k_F} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (91)$$

ただし、磁場がないので $\Delta_{\parallel} = \Delta_{\perp} \equiv \Delta_0$ とした。最終的なエネルギー分散 (91) は \hat{n} と φ に依存しない。この分散関係は Chung-Zhang [67], Nagato-Higashitani-Nagai [68], Volovik [69] らにより $\hat{n} = \hat{z}$ の場合に対して導出された。

磁場が導入されると、一般には、2つのスピンセクターが結合することで低エネルギースペクトルが Zeeman 分裂する。しかしながら、 $^3\text{He-B}$ の表面束縛状態の驚くべき特徴として、必ずしも Zeeman 分裂が起こるわけではなく、磁場の方向等に敏感であるということが挙げられる。Chung-Zhang [67] と Nagato ら [68] は独立に $\hat{n} = \hat{z}$ の状況を考え、表面束縛状態のエネルギー分散に対する磁場の効果を計算した。壁に垂直な磁場をかけると表面束縛状態のエネルギー分散は Zeeman 分裂し、ギャップが開く。しかしながら、壁に対して垂直な磁場をかけても表面束縛状態のエネルギー分散はギャップレスのまま残る。結果として、壁近傍でのスピン帯磁率は Ising 的な強い異方性を示す。バルクの B 相の秩序状態ではスピン帯磁率は等方的であるために、壁近傍での Ising 的異方性の出現は驚くべきことである。さらにこの Ising 異方性は表面束縛状態をマヨラナ粒子として見なすことで説明される [63]。ちなみに、外部磁場に対する表面束縛状態の異方的な応答については 2次元カイラル p 波超伝導体を想定した Stone-Roy [35] により初めて指摘されたものであり、Chung-Zhang [67] と Nagato ら [68] の理論はそれを 3次元かつ時間反転対称性を持つ p 波超伝導体に拡張した。一方で、Volovik [25] は B 相が不安定となり A 相への相転移が起こるような高磁場極限を考えた。その状況では Ising 異方性は消失し、磁気応答は等方的になると指摘した。

さて、ここでは、Chung-Zhang [67] や Nagato ら [68] に加えて Volovik [25] を含む全ての理論を繋げるために、任意の \hat{n} , φ , \mathbf{H} に対する表面 Andreev 束縛状態のエネルギー分散を求めよう。有限の磁場 $H \neq 0$ のもとで、エネルギー分散は

$$E(k_x, k_y) = \pm \sqrt{|E^{(0)}(k_x, k_y)|^2 + |\mu_B H \hat{\ell}_z(\hat{n}, \varphi)|^2}, \quad (92)$$

で与えられる。この結果は表面 Andreev 束縛状態のエネルギー分散がギャップ

$$\min |E(k_x, k_y)| = \mu_B H_{\mu} |R_{\mu z}(\hat{n}, \varphi)|, \quad (93)$$

を開くということを示唆している。この結果より、もし \hat{n} が壁に垂直に固定されている場合 ($\hat{n} = \hat{z}$)、そのエネルギーギャップは $\min |E(k_x, k_y)| = \mu_B H_z$ となり、磁場の z 方向への成分のみが表面束縛状態と結合するという Ising 異方性が再現される。しかしながら、例えば磁場を壁に平行にかけた場合 $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ 、そのエネルギーギャップは $\min |E(k_x, k_y)| = \mu_B H |R_{xz}(\hat{n}, \varphi)|$ となり、表面束縛状態のエネルギーギャップは (\hat{n}, φ) に強く依存する。 $\hat{n} = \hat{z}$ であれば明らかに $\min |E(k_x, k_y)| = 0$ となり表面束縛状態は壁に平行磁場に応答しない。一方で、ギャップが最大に開くのは、 \hat{n} と φ とが $|R_{xz}(\hat{n}, \varphi)| = 1$ を満たすときである。2.4.1 節で触れたように、回転角 φ は一般に $\varphi = \cos^{-1}(-\frac{1}{4}) \approx \pm 104^\circ$ に固定される (Leggett 角度)。このとき、 $|R_{xz}(\hat{n}, \varphi)| = 1$ を満たす \hat{n} ベクトルは、例えば、

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -\sqrt{3}, 1), \quad (94)$$

である。 \hat{n} ベクトルがこの方向に固定されているならば、表面束縛状態は最大エネルギーギャップ $\min |E(k_x, k_y)| = \mu_B H$ を開く。

一方で、熱力学的に \hat{n} ベクトルの向きはどのように決まるのか？ Ginzburg-Landau 理論の範囲内では、壁近傍での \hat{n} ベクトルの向きは磁気的双極子相互作用によって決定され、 \hat{n} を壁に垂直に向けることを好む： $\hat{n} = \hat{z}$ 。しかしながら、磁気的双極子相互作用の磁場スケールは $H_D \simeq 20\text{G}$ 程度であり、 \hat{n} の向きは外部磁場により容易に回転される。結果として、 $H \gg H_D$ を満たす高磁場極限では \hat{n} ベクトルが式 (94) の向きに固定され、表面束縛状態はエネルギーギャップ $\min |E(k_x, k_y)| = \mu_B H$ を開くことが予想される。しかしながら、ここまでの議論は Andreev 方程式の解析解を基に議論しており、対ポテンシャルの振幅が空間一様等のやや荒い近似を用いている。定量的な議論を行うためには、準古典 Eilenberger 方程式と双極子相互作用を伴うギャップ方程式を自己無撞着に計算することが要求される。

以上は、BdG 方程式から直接的に引き出される結論であるが、この微視的理論と既知のマクロな理論結果、即ち Ginzburg-Landau 理論に基づく結果との対応関係を明確にしておくことは重要である。 Ginzburg-Landau 理論によると B 相の表面近傍での磁場のエネルギー密度は

$$F_H = -\epsilon_S [\hat{s}_\nu R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi) H_\mu]^2, \quad (95)$$

として、壁に垂直な単位ベクトル $\hat{s}_j = \delta_{jz}$ と回転行列 $R_{\mu\nu}(\hat{n}, \varphi)$ で与えられる [70]。係数に現れている ϵ_S は $\epsilon_S \equiv \xi_0(\chi_N - \chi_B) > 0$ として B 相と常流動相の帯磁率に依存しており、正定値をとる。つまり、磁場エネルギーを最小化するための条件は $F_H \propto -[R_{\mu z}(\hat{n}, \varphi) H_\mu]^2$ より、 $|R_{\mu z}(\hat{n}, \varphi)| = 1$ であることは容易に分かる。つまり、Ginzburg-Landau 理論による磁場エネルギーを最小化するための条件は表面 Andreev 束縛状態のエネルギーギャップが最大となる条件と等価であり、それを満たす B 相の秩序状態は $\varphi = \cos^{-1}(-\frac{1}{4})$ と式 (94) の \hat{n} を用いて表される。即ち、 $H \gg H_D$ を満たす強磁場極限において、上記の表面束縛状態の解析に基づく微視的結論と Ginzburg-Landau 理論に基づく既知のマクロな結論とが一致した。

5 Majorana 粒子

スピン 3 重項超伝導・超流動体のフェルミ場の演算子は Majorana 場との類似性を持っている。 Majorana 場或いは Majorana 粒子とはそれ自身の反粒子と等価な相対論的粒子である [71]。この節では Dirac 場と Majorana 場について紹介した後に、スピン 3 重項超伝導・超流動体フェルミ場の演算子と Majorana 場との類似性について述べる。さらには、Majorana 場に直接的に起因して、量子渦に付随した零エネルギー準粒子が非可換統計性に従うことを示す。

5.1 Dirac 場

場の理論に従うと、Lorentz 変換の既約表現として自然な形で 2 種類のスピン 1/2 のフェルミ粒子が導きだされる。一つは 4 成分スピノルとして表される Dirac 粒子であり、もう一つは 2 成

分スピノルの Majorana 粒子である。Majorana 粒子とは Ettore Majorana によって提案された負のエネルギー固有値を持たない相対論的方程式に従う粒子のことである [71]。この2種類のフェルミ粒子の顕著な違いはラグランジアンに現れる。Dirac 粒子の質量項は Dirac スピノルの $U(1)$ 変換に対する不変性が保たれているため Noether の定理より電荷（或は粒子数）が保存される。一方で Majorana 粒子の質量項は $U(1)$ 対称性を持たないため、粒子数保存則が成り立たない [72]。

もうひとつ顕著な違いが零エネルギー固有モードの性質に見て取れる [73]。まずは比較のために Dirac 場と Dirac 零エネルギーモードについて触れておく。質量 m の自由 Dirac 粒子の第2量子化されたハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_D = \int d\mathbf{r} \Psi_D^\dagger(\mathbf{r}, t) \mathcal{H}_D(\mathbf{r}) \Psi_D(\mathbf{r}, t), \quad \mathcal{H}_D(\mathbf{r}) = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m, \quad (96)$$

と与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\alpha} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, $\beta \equiv \gamma^0$ とした。Dirac 場 Ψ_D は反交換関係を満たす。Heisenberg 方程式 $i\partial_t \psi = [\psi, \mathcal{H}_D]$ より所謂 Dirac 方程式 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_D(\mathbf{r}, t) = 0$ が得られる。ここで、 γ^μ は 4×4 の行列であり、Clifford 代数の関係式 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を満たすことが要求されるが、それ以外は任意性がある。この任意性により、Dirac 行列はユニタリー行列 W ($W^\dagger W = WW^\dagger = 1$) を用いて一般化される： $\gamma^\mu \mapsto W \gamma^\mu W^\dagger$ 。このとき、上記の粒子-反粒子対称性に関する行列も $\Gamma \mapsto W^* \Gamma W^\dagger \equiv \tilde{\Gamma}$ とユニタリー変換される。

$\mathcal{H}_D(\mathbf{r})$ のエネルギー固有状態を考えるため $\Psi_D(\mathbf{r}, t) \mapsto \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}$ とすると Dirac 方程式は

$$(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m) \varphi_E(\mathbf{r}) = E \varphi_E(\mathbf{r}), \quad (97)$$

となる。もちろん、 φ_E は規格直交条件 $\int d\mathbf{r} \varphi_E^\dagger(\mathbf{r}) \varphi_{E'}(\mathbf{r}) = \delta_{E,E'}$ と完全性の条件 $\sum_E \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_E^\dagger(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を満たしている。この Dirac ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}_D(\mathbf{r})$ は以下の変換のに対して不変であることに注意しておく：

$$\Gamma \mathcal{H}_D^* \Gamma^\dagger = -\mathcal{H}_D, \quad \Gamma = \Gamma^\dagger \equiv -\sigma_y \tau_y. \quad (98)$$

$\Gamma^2 = 1$ であり、この変換は荷電共役変換（粒子・反粒子変換）を表す。 Γ の具体的な形は γ^μ 行列のとりかたに依存する。Dirac 方程式 (97) は正のエネルギー固有状態と負のエネルギー固有状態の両方を伴い、その2つの固有状態は式 (129) の粒子・反粒子変換を通して1対1対応する：

$$\varphi_{-E}(\mathbf{r}) = \Gamma \varphi_E^*(\mathbf{r}). \quad (99)$$

Dirac 方程式 (97) が正と負の両方のエネルギー固有状態を伴うことから、4成分 Dirac スピノルはスピン $1/2$ と粒子-反粒子の自由度に起因している。つまり、正のエネルギー固有値 E を持つ粒子の生成演算子を a_E^\dagger とし負のエネルギー固有値 $-E$ の反粒子 $\varphi_{-E} = \Gamma \varphi_E^*$ の生成演算子を b_E^\dagger とすると、 $a_{E_1}^\dagger a_{E_2}^\dagger \cdots b_{E_1}^\dagger b_{E_2}^\dagger \cdots |0\rangle$ を基底として Fock 空間が張られる。これにより、第2量子化された Dirac 場 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ は

$$\Psi_D(\mathbf{r}, t) = \sum_{E>0} \left[\varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} a_E + \varphi_{-E}(\mathbf{r}) e^{iEt} b_E^\dagger \right], \quad (100)$$

と粒子と反粒子からなる全てのエネルギー固有モードを用いて展開される。この Dirac 場の荷電共役変換を考えると、粒子と反粒子の自由度に起因して、

$$\Gamma \Psi_D^*(\mathbf{r}, t) \neq \Psi_D(\mathbf{r}, t), \quad (101)$$

となることは明らかである。この Dirac 場において仮に $E=0$ の固有状態が存在したとする。そのとき、 Ψ_D は

$$\Psi_D(x) = \varphi_{E=0}(x)\alpha + \sum_{E>0} \left[\varphi_E(x)e^{-iEt}a_E + \varphi_{-E}(x)e^{iEt}b_{-E}^\dagger \right], \quad \alpha = a_0 + b_0^\dagger, \quad (102)$$

となる。つまり、Dirac の零エネルギー固有状態は粒子と反粒子が等価に寄与することで形成されている。ここで、 $a_0 \neq b_0$ はともに反交換関係を満たすため、零エネルギー固有状態の演算子 α もフェルミ粒子として振る舞う： $\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1$, $\{\alpha, \alpha\} = \{\alpha^\dagger, \alpha^\dagger\} = 0$ 。Dirac 方程式における零エネルギー固有モードの分布については $1+1$ 次元系では Jackiw-Rebbi [55] によって指摘され、 $2+1$ 次元では [74, 75] 等の仕事がある。3 節等でも触れたように、位相ドメイン構造を持つ超伝導体の BdG 方程式も 1 次元 Dirac 方程式へマップされる。Dirac 零エネルギー固有状態の典型例として、SNS 接合系やダークソリトン状態、Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov 状態などに現れるミッドギャップ状態がある [12, 76, 77]。

5.2 Majorana 場

一方の Majorana スピノルは 2 成分だけで構成される。先述の通り、Lorentz 変換の既約表現として自然に導かれるものだが [72]、ここでは簡単のため Dirac 方程式 (97) より Majorana 方程式を導くことにする。まず Weyl 表示を用いると、 $\gamma^0\gamma$ が部分対角的になることに注意する。そこで、Dirac スピノルを $\Psi_D = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ の様に 2 成分スピノル $\Psi_{1,2}$ を用いて分解すると、Dirac 方程式 (97) は $(i\partial_t - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \Psi_1 = m\Psi_2$, $(i\partial_t + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \Psi_2 = m\Psi_1$ となる。ここで、 $\Psi_2 = i\sigma_y \Psi_1^*$ とおくと、上記 2 つの方程式は 2 成分スピノル $\Psi \equiv \Psi_1$ に対する単一の方程式 $(i\partial_t - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \Psi = im\sigma_y \Psi^*$ に帰着される。この方程式は相対性理論の根幹をなすローレンツ不変性に矛盾しない。以上から、4 成分表示での Majorana スピノル Ψ_M は 2 成分スピノル Ψ を用いて

$$\Psi_M = (\Psi, i\sigma_y \Psi^*)^T, \quad (103)$$

と表現でき、可約であることが分かる。

エネルギー固有状態 $\Psi_M \mapsto \varphi_E(\mathbf{r})e^{-iEt}$ に対する 4 成分表示では Majorana 方程式は Dirac 方程式 (97) と等価であり、

$$(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \varphi_E(\mathbf{r}) = E\varphi_E(\mathbf{r}), \quad \varphi_E(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \varphi_E^{(2)}(\mathbf{r}) \\ i\sigma_y \varphi_E^{(2)*}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (104)$$

となる。尚、 $\varphi_E^{(2)}(\mathbf{r})$ は 2 成分スピノルである。Dirac 場に対して導入された荷電共役変換に対する不変性も依然として保たれており、式 (99) のエネルギー固有状態の 1 対 1 対応の関係性も成立

する。ただし、4成分 Majorana スピノルは可約であり、本質的には2成分スピノルを用いて表現できることから、式 (99) の対応関係は粒子と反粒子の等価性を示唆する。これを具体的に観るために、Majorana (或いは Dirac) 方程式 (104) において $\alpha \equiv \gamma^0 \gamma = \text{diag}(\sigma, -\sigma)$, $\beta \equiv \gamma^0 = \tau_x$ とする。このとき、荷電共役演算子は $\Gamma = \tau_y \sigma_y$ と書くことができ、式 (99) の対応関係は

$$\varphi_{-E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \hat{0} & -i\hat{\sigma}_y \\ i\hat{\sigma}_y & \hat{0} \end{pmatrix} \varphi_E^*(\mathbf{r}) = \varphi_E(\mathbf{r}), \quad (105)$$

となる。これは正のエネルギー固有状態と負のエネルギー固有状態とが等価であることを意味する。即ち、Majorana 場の表現では粒子と反粒子が同一視される。

さて、Majorana 場 Ψ_M を考えよう。Majorana 場 Ψ_M の量子化は Dirac 場のときと同じ手順で行なわれる。ただし、式 (105) の粒子・反粒子の等価性より、反粒子の生成演算子 b_E^\dagger を粒子自身の生成演算子 a_E^\dagger に読み替える必要があることに注意したい。このとき、量子化された Majorana 場 Ψ_M は

$$\Psi_M(\mathbf{r}, t) = \sum_{E>0} \left[\varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} a_E + \Gamma \varphi_E^*(\mathbf{r}) e^{iEt} a_E^\dagger \right], \quad (106)$$

として、 $E>0$ を持つ固有状態の生成・消滅演算子を用いて展開できる [73]。Dirac 場とは対照的に荷電共役変換の下で自分自身に戻る：

$$\Gamma \Psi_M^*(\mathbf{r}, t) = \Psi_M(\mathbf{r}, t), \quad (107)$$

これは Majorana 粒子がそれ自身の反粒子と等価であり、4成分表示は2成分表示に対して可約であることを示唆する。

Majorana 場が零エネルギー固有モードを伴う場合、

$$\Psi_M(\mathbf{r}, t) = \varphi_{E=0}(\mathbf{r}) \alpha + \sum_{E>0} \left[\varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} a_E + \Gamma \varphi_E^*(\mathbf{r}) e^{iEt} a_E^\dagger \right], \quad \alpha = a_0 + a_0^\dagger, \quad (108)$$

となり、Majorana 零エネルギー固有状態はその消滅演算子 α がそれ自身の生成演算子 α^\dagger と等価になる： $\alpha = \alpha^\dagger$ 。実際に、Majorana 場の正準交換関係を要請すると直ちに、Majorana 零エネルギー固有状態の演算子は Clifford 代数の交換関係 $\{\alpha, \alpha\} = 1$, $\{\alpha, a_E\} = \{\alpha, a_E^\dagger\} = 0$ ($E \neq 0$) を満たすことが示される。即ち、この零エネルギー粒子はフェルミ統計性に従わないことがわかる。フェルミオンの反交換関係を回復するためには、 α と同じ性質 $\alpha^2 = 1/2$ をもつ零エネルギー演算子 β を導入し

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + i\beta), \quad c^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - i\beta), \quad (109)$$

という新たな演算子 c, c^\dagger を定義すれば良い ($\sqrt{2}$ は規格化因子)。 α と β はともに零エネルギー演算子であるから、 c も同様に零エネルギー演算子であるが、反交換関係 $\{c, c^\dagger\} = 1$, $c^2 = c^{\dagger 2} = 0$ を回復しているという点で異なる。この c により記述される粒子は“complex フェルミオン”とも呼ばれる。 β の物理的な意味は次節で触れる。

5.3 スピン 3 重項超伝導体における Majorana 場

相対論的粒子、即ち、線形な分散を持つ（準）粒子によって構成されるフェルミ場が式 (107) で示される Majorana 条件を満たす場合、そのフェルミ場で表される粒子のことを Majorana フェルミオンと呼ぶ。Majorana フェルミオンの顕著な性質として、零エネルギー固有モードの自己共役性 $\alpha = \alpha^\dagger$ が導かれた。この零モードのことをしばしば Majorana 零モードと呼ぶことがある。次節で示すように量子渦に Majorana 零モードが付随した場合、量子渦の統計性が非可換エニオン統計に従うことが指摘されている。この非可換統計性を示す前に、Majorana 粒子と Majorana 零モードという場の理論の概念を超伝導・超流動系に適用しておく。

まず、超伝導のフェルミ場を Majorana 場として見なすための条件は、(i) ハミルトニアンが式 (129) で示されるような荷電共役変換のもとで不変性をもっている (Γ の具体的な形は問わない) こと、そして、(ii) 量子場が式 (107) で示されるように荷電共役変換に対して自分自身に戻るということである。加えて、(iii) 準粒子のエネルギー分散が線形（相対論的）であるということが条件として挙げられる。超伝導/超流動系の言葉では条件 (i) は粒子・正孔対称性であり、2.3 節と 2.4 節で示したようにスピン状態によらずこの不変性は保たれている。スピン 1 重項超伝導体の場合、 $\Gamma = -i\sigma_y$ であり、3 重項では $\Gamma = \tau_x$ である。条件 (ii) については注意が必要である。スピン 1 重項超伝導体の場合は明らかに式 (107) で示されるような量子場の関係式は成立しない。一方のスピン 3 重項超伝導体でのフェルミ場は $\Gamma = \tau_x$ を用いて、

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{E>0} \left[\varphi_E(\mathbf{r}) \eta_E + \Gamma \varphi_E^*(\mathbf{r}) \eta_E^\dagger \right], \quad (110)$$

と書ける。ただし、 $\varphi = [u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow]^T$ とした。つまり、スピン 3 重項超伝導体のフェルミ場 $\Psi(\mathbf{r})$ は Majorana 的な荷電共役変換の関係性 (107) を満たしている。このことは、即ち、スピン 3 重項超伝導体のエネルギー固有状態は正（或いは負）のエネルギー固有状態のみが独立な自由度として残る。しかしながら、スピン 3 重項超伝導体のフェルミ場 $\Psi(\mathbf{r})$ を Majorana 場と見なすためには条件 (iii) を満たす必要がある。これに注目しながら、表面束縛状態と量子渦束縛状態が存在する場合のスピン 3 重項超伝導体のフェルミ場を観ていくことにする。

5.3.1 Majorana 条件と表面束縛状態

3.4 や 4.2 節でみたように、線形的なエネルギー分散は表面 Andreev 束縛状態にて現れることから、スピン 3 重項超伝導体の表面近傍の物理現象は線形分散を持つ表面 Andreev 束縛状態に支配されており、そのフェルミ場は Majorana 場として粒子・反粒子等価性 (107) を満たす。ただし、 $|E| \gtrsim \Delta$ の項エネルギー固有状態は線形分散を持たないため、Majorana 場と見なすためには十分低温領域 ($T \ll T_c$) に限られることに注意したい。加えて、強調すべきことは、スピン 3 重項超伝導体の表面 Andreev 束縛状態の準粒子波動関数は弱結合極限 $\Delta \ll E_F$ において $u_{E,\sigma}(\mathbf{r}) = S v_{E,\sigma}^*(\mathbf{r})$ の関係性を示す (S は $|S|^2 = 1$ を満たす位相因子)。即ち、十分な低温領域 ($T \ll T_c$) において、表

面 Andreev 束縛状態が寄与するフェルミ場は式 (110) より

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{0 < E \lesssim |\Delta|} \varphi_E(\mathbf{r}) \left[\eta_E + S\eta_E^\dagger \right] + \Psi_{\text{bulk}}(\mathbf{r}) \approx S^* \Psi^\dagger(\mathbf{r}), \quad (111)$$

となる。ただし、 $\Psi_{\text{bulk}}(\mathbf{r})$ は $|E| \gtrsim \Delta$ からの寄与を表す。この関係式は Stone-Roy により時間反転対称性を持たない 2 次元カイラル p 波超伝導体において初めて指摘された。その後、時間反転対称性を持つ超流動 $^3\text{He-B}$ 相 [63, 68] や制限空間中の超流動 $^3\text{He-A}$ 相 [34] において同様の関係式が成立することが示された。この関係式 $\Psi \approx \Psi^\dagger$ は非常に特異な性質を持つ。文献 [35, 63] で示されたように、密度演算子等は恒等演算子に置き換わるが、唯一、特定のスピン演算子のみが非自明な演算子として残る。この結果、Majorana 場で表される表面束縛状態は特定の方向の磁場にのみ結合するという Ising 的な磁気応答を示す。

5.3.2 量子渦束縛状態

一方で、量子渦束縛状態が存在する際のスピン 3 重項超伝導体のフェルミ場はどのような性質を持っているのだろうか？ 3.3 や 4.1 節で示したように、カイラル p 波超伝導体や超流動 $^3\text{He-A}$ の整数渦や半整数量子渦等に出現する量子渦束縛状態は厳密に零エネルギーの固有状態を持ち、式 (58) に示されるように量子数 $q \in \mathbb{Z}$ に線形なエネルギー分散を持つ。しかしながら、式 (59) で示されるように、量子渦束縛状態の準粒子波動関数は $E=0$ の固有状態については

$$u_{E=0}(\mathbf{r}) = v_{E=0}^*(\mathbf{r}), \quad (112)$$

が成立している。一方で、 $E \neq 0$ に対しては $u_E(\mathbf{r}) \neq v_E^*(\mathbf{r})$ である。このため、量子渦束縛状態では表面束縛状態の場合と異なり、式 (111) の関係式が成立しない。

しかしながら、式 (58) で示される量子渦束縛状態のエネルギー分散は $\Delta^2/E_F \approx T_c^2/T_F$ 程度のエネルギースケールで離散化されていることに注意したい。例えば、超流動 ^3He では $T_c \sim 1\text{mK}$ に対して $T_F \sim 1\text{K}$ であり、この離散性は非常に小さい。しかし、 p 波超流動相転移が期待されている冷却フェルミ原子系ではフェッシュバハ共鳴という手法を用いることで T_c を制御することができ、 $T_c/T_F \sim 0.01$ から 0.1 程度まで増幅することができる。このような強結合領域での量子渦束縛状態は大きなエネルギーギャップを持っており、 $T \ll T_c^2/T_F$ の量子極限では零エネルギー固有状態は他の有限エネルギー状態から十分に孤立している [48, 49]。

このような孤立した零エネルギー固有状態の演算子は $\{\eta_{E=0}, \eta_{E=0}^\dagger\} = 1$ の Majorana 零モードの関係性を満たしているため、前節でみたようにこの零エネルギー状態の真空状態を定義することができない。この困難を回避するために、式 (109) では Majorana 零モードの関係性を持つ演算子を準備してやり、それらの線形結合として complex 粒子 “ c ” を導入した。例えば、4.1 節でみたような制限空間中の回転超流動 $^3\text{He-A}$ 相の半整数量子渦では片方のスピンセクターでのみ零エネルギー状態が出現する。Ivanov [61] はこのスピン偏極した Majorana 零モードを付随した半整数量子渦に着目し、その統計性が非可換エニオン統計に従うことを示した。ボース統計やフェ

ルミ統計, 可換エニオン統計等は粒子(渦)交換に伴い多体波動関数の位相が回転する. 一方の, 非可換エニオン統計は基底状態がある程度縮退していることが要求される. 粒子(渦)交換操作により基底状態が別の縮退した基底状態へユニタリー変換され, そのユニタリー演算子が非可換であるときその統計性を非可換エニオン統計と呼ぶ. 基底状態の縮退は複数本の半整数量子渦を考えれば良い. $2N$ 本の半整数量子渦では N 対の complex 粒子が定義され, その占有・非占有から 2^{N-1} 次元の Hilbert 空間が張られる. ここで, 2 で割ったのは全準粒子数が mod 2 で保存することを反映している. 零エネルギー状態は量子渦芯からコヒーレンス長程度に局在しているので, 量子渦間隔が十分に離れていれば零エネルギー準粒子間のトンネル効果は無視でき, 2^{N-1} 個の状態は零エネルギーに縮退している. 尚, 渦糸が奇数本の場合は超伝導体の表面に現れる表面 Andreev 束縛状態のエネルギーが厳密に零になることで, 零エネルギー固有状態の総数は偶数個に保たれる [48, 49, 50].

半整数量子渦が非可換エニオン統計に従うことを示すには, 基底状態の縮退と零エネルギー準粒子の Majorana 性 $\{\eta_i, \eta_j\} = \delta_{ij}$ に加えて量子渦特有の位相構造が重要になる. 半整数量子渦の位相構造は図 4 に示しているが, スピン量子化軸を z 軸に取った表式 (84) に示されるように片方のスピンセクターが整数量子渦を持つ. 対ポテンシャルの位相が ϑ 変化した場合 $\Delta \mapsto \Delta e^{i\vartheta}$, その位相変化分は準粒子波動関数の位相を $u_\nu(\mathbf{r}) \mapsto u_\nu(\mathbf{r})e^{i\vartheta/2}$, $v_\nu(\mathbf{r}) \mapsto v_\nu(\mathbf{r})e^{-i\vartheta/2}$ と回転することで吸収されることが BdG 方程式 (18) よりみてとれる. つまり, 量子渦周りには必ず対ポテンシャルの位相が 0 から 2π に変化している線(ブランチカット)が存在するが, そこを準粒子が横切ると対ポテンシャルの 2π の位相変化を感じ取り $u_\nu(\mathbf{r}) \mapsto -u_\nu(\mathbf{r})$, $v_\nu(\mathbf{r}) \mapsto -v_\nu(\mathbf{r})$ と変化する. 式 (110) より準粒子演算子は

$$\eta_E = \int d\mathbf{r} \left[u_{E,\sigma}^*(\mathbf{r}) \Psi_\sigma(\mathbf{r}) + v_{E,\sigma}^*(\mathbf{r}) \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \right], \quad (113)$$

と与えられるので, このブランチカットを横切ること準粒子演算子は $\eta_E \mapsto -\eta_E$ と符号変化する. この位相構造は超伝導対称性によらず(渦度が奇数の場合に限るが)一般的であり, 準粒子のエネルギー等にも依存しない.

Ivanov [61] はこれらの零エネルギー準粒子の特徴と量子渦特有の位相構造を利用することで, 半整数量子渦の非可換エニオン統計性を見いだした. 具体的に 4 本の半整数量子渦を考え, 各々に付随する零エネルギー Majorana 演算子を η_j ($j=1, \dots, 4$) とする. 架空図鑑距離が十分に離れている場合は, 2 つの complex 粒子は適当な渦対間で形成される: 例えば $c_1 = (\eta_1 + i\eta_2)/\sqrt{2}$, $c_2 = (\eta_3 + i\eta_4)/\sqrt{2}$. 結果として 4 通りの基底状態が縮退する: $|00\rangle$, $|10\rangle \equiv c_1^\dagger |00\rangle$, $|01\rangle \equiv c_2^\dagger |00\rangle$, $|11\rangle \equiv c_2^\dagger c_1^\dagger |00\rangle$. しかし, 準粒子数の偶奇性を考えると, $|00\rangle$ と $|11\rangle \equiv c_2^\dagger c_1^\dagger |00\rangle$ とで張られる 2 次元 Hilbert 空間と, 準粒子数が奇数個のセクターとに分かれる. Ivanov は零エネルギー準粒子演算子の Majorana 性と渦に付随した準粒子がブランチカットを横切る際に準粒子演算子が $\eta_j \mapsto -\eta_j$ に変わる事実を用いて, 渦交換操作によって 2 次元 Hilbert 空間の状態ベクトルが離散的に回転することを示した. 具体的に “2” 番目と “3” 番目の渦を交換する操作の表現行列 \hat{U} を用いて, 任

意の基底状態ベクトル $|G\rangle$ は

$$|G\rangle \equiv a|00\rangle + b|11\rangle \mapsto |G'\rangle = \hat{U}|G\rangle, \quad \hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

と回転する [61]. ここで, $a, b \in \mathbb{C}$ は適当な係数であり, 行列の基底は $|00\rangle$ と $|11\rangle \equiv c_2^\dagger c_1^\dagger |00\rangle$ とで張られている. 明らかに $\hat{U}^2 = -i\hat{\sigma}_x$ であり, これは “2” 番目と “3” 番目の渦交換操作を 2 回繰り返して元の渦配置に戻すと基底状態ベクトルが $|00\rangle$ から $|11\rangle$ へ回転していることを示唆する. つまり, 半整数量子渦の渦交換は非可換エニオン統計に従うことがわかる. 詳細については Ivanov の論文 [61] や Nayak らのレビュー [78] を参照されたい. 尚, Wilczek-Zee [79] は 1984 年に, 縮退した基底状態を持つ量子系の断熱的な運動を考えると必然的に非可換な幾何学的位相 (Berry 位相) が生じることが示された. しかしながら, Stern ら [80] は, Majorana 零モードを伴う系ではこの非可換な幾何学的位相は結果的に消失することを示した. 即ち, 半整数量子渦の非可換統計性は幾何学的位相に起因しているのではなく, 零エネルギー準粒子演算子の Majorana 性と量子渦に付随したブランチカットの影響によるものである.

尚, 4.1 節でも触れたように, 制限空間中の回転超流動 $^3\text{He-A}$ では整数量子渦が半整数量子渦と競合する. 整数量子渦では 2 つのスピンスクターが同じ渦度を持っているため, 零エネルギー状態は各々のセクターで出現する. この場合, complex 粒子は 2 つのスピンスクターをつなげるように定義され得る: $c = (\eta_\uparrow + i\eta_\downarrow)/\sqrt{2}$ (簡単のため $\eta_{E=0} \equiv \eta$ とした). このような事情のため整数量子渦の統計性が非可換エニオン統計に従うかどうかは複雑な問題である. 詳細については Kawakami ら [60] や Yasui ら [81] の仕事を参照していただきたい.

また, 量子渦間の距離が接近すると渦に束縛された準粒子間のトンネル確率が指数関数的に増大し, 零エネルギー固有値が有限値へ分裂する. 具体的に渦間隔が D_v のときの零エネルギー準粒子波動関数のオーバーラップに起因する零エネルギーの分裂 δE は

$$\delta E \propto \begin{cases} \frac{\Delta}{\sqrt{k_F D_v}} \cos\left(k_F D_v + \frac{\pi}{4}\right) e^{-D_v/\xi} & \text{for } k_\mu \xi \gg 1 \\ \Delta \frac{\lambda^{3/2} \sqrt{1-\lambda}}{k_F \xi} e^{-(1-\lambda)D_v/\xi} & \text{for } k_\mu \xi < 1 \end{cases}, \quad (115)$$

と見積もられる [50]. ここで, $\lambda \equiv \sqrt{1 - (k_\mu \xi)^2}$ とした. Cheng ら [82] は量子渦交換に対する非断熱的な効果を調べ, 渦交換に伴い多体波動関数が獲得する位相がこの零エネルギー固有値の分裂幅に依存した量だけシフトすることを指摘した.

6 おわりに

本稿ではスピン 3 重項超伝導・超流動体の表面や量子渦に束縛されるギャップレス準粒子状態について紹介した. 主に BdG 方程式の解析解を基に, 量子渦及び表面束縛状態が Andreev 束縛状態として統一的に理解できることを示した. さらに, このギャップレス Andreev 束縛状態が具体

的に現れる例として、超流動 ^3He の A 相及び B 相について紹介した。スピン 3 重項超伝導・超流動体特有の粒子・正孔対称性に起因して、そのフェルミ場の演算子は一般に Majorana 場として記述されることを示し、さらにギャップレス Andreev 束縛状態は Majorana 性の帰結として奇妙な代数構造を持つことを示した。この Majorana 性は Ising 的な磁気応答や非可換エニオン統計といったエキゾチックな量子現象を抽出することに成功してきた。一方で、Andreev 束縛状態はバルクに内在する非自明なトポロジカル不変量の直接的な帰結であり、さらに、近年の理論的な研究により奇周波数クーパー対振幅とも関連していることが明らかになりつつある。この奇周波数対振幅の存在はその Andreev 束縛状態が異常な近接効果を含有することを示唆している。このように、ギャップレス Andreev 束縛状態が Majorana 性、トポロジカル不変量、奇周波数対振幅等といった多彩な側面を持っていることが明らかになってきた。紙面の都合上、残念ながらトポロジカル不変量や奇周波数対振幅については十分な解説ができなかったが、興味のある読者は文献 [12, 19, 20, 21] 等を参考にしていただきたい。

当面の課題は Andreev 束縛状態の Majorana 性を観測することであろう。Majorana 準粒子の特徴の 1 つとして外部擾乱に対して強い耐性を持っていることが挙げられるが、一方でこの強い耐性は Majorana 準粒子を観測することを困難にしている。Majorana 性を観測する最も直接的な方法は Majorana 準粒子間の干渉効果 [78] を利用することであるが、これは理論的にも実験的にも非常にチャレンジングである。しかしながら、非可換エニオン統計に従う Majorana 準粒子は外部擾乱に強い耐性を示す量子演算として応用できると期待されている [78, 83]。現在、Majorana 粒子に関する物性研究が爆発的な勢いで進展しており、 p 波超伝導・超流動のみならず様々な物質で Majorana 粒子を探す熾烈なレースが展開されている。

謝辞

本ノートは岡山大学の町田一成氏、市岡優典氏、堤康雅氏、川上拓人氏との共同で行われた研究成果に基づくものです。また、有意義な議論をして頂いた大見哲巨氏、中原幹夫氏、新田宗土氏、東谷誠二氏、石川修六氏、田仲由喜夫氏、佐藤昌利氏に感謝します。本研究は科学研究費補助金「若手研究 (B)」と文部科学省新学術領域研究「トポロジカル量子現象 (No. 22103005)」の助成を受けて行なわれました。

Appendix: カイラル p 波超伝導体の Caroli-de Gennes-Matricon 状態

この Appendix B にて、スピン編極した p 波超伝導体の BdG 方程式の CdGM 解を導出する。ここでは、カイラル $k_x + ik_y$ 対状態が支配的な状況を考え、 k_z 成分については無視する。このカイラル状態は空間次元等によらず、スピン編極した p 波対状態において安定である。このとき、渦糸解として次のような軸対称な渦状態を考えることにする：

$$\Delta_{+1}(\mathbf{r}) = \Delta_{+1}(\rho)e^{i\kappa\theta}, \quad \Delta_{-1}(\mathbf{r}) = \Delta_{-1}(\rho)e^{i(\kappa+2)\theta}. \quad (116)$$

ここで、 $|\Delta_{+1}| \gg |\Delta_{-1}|$ である。クーパー対のカイラリティと渦度が反平行な渦 $\kappa = -1$ の CdGM 解については Kopnin-Salomaa [38] により導出され、その後、より一般的な状況での CdGM 解が Stone-Chung [84] や Volovik [85] らにより与えられた。さらに、Tewari ら [52] はカイラル p 波超伝導渦の BdG 方程式をアンドレーエフ近似の範囲内 $\xi \gg k_F^{-1}$ において 1 次元マヨラナ方程式にマップすることで、カイラル p 波超伝導渦に束縛された準粒子に対する指数定理を導出することに成功した。このとき、渦度 κ に関する情報はマヨラナ方程式における質量項として置き換わる。特に渦度 κ が奇数の場合には 1 次元的な質量ドメインウォールを伴うため、Jackiw-Rebbi [55] による 1 次元ディラック方程式に対する指数定理との類似性から、零エネルギー固有値の分布が示された。さらに、より一般的に任意の渦度 κ を持つ量子渦の CdGM 解が導出された [49]。特に、主成分 Δ_{+1} に対して逆向きのカイラリティ Δ_{-1} が混在する場合でも零エネルギー解が安定に存在し得ることが示される。

さて、BdG 方程式から出発しよう。ここで、 $k = k_\mu \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \ll k_\mu \equiv \sqrt{2M|\mu|^2}$ と仮定すると、BdG 方程式は以下の様に簡単化される：

$$\left[\mathcal{L}_m(\rho) \hat{\tau}_0 + \frac{M}{k_F} \left\{ D_-(\rho) \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dD_-(\rho)}{d\rho} + \frac{D_-(\rho)}{2\rho} \right\} \hat{\tau}_2 + 2ME_\nu \hat{\tau}_3 \right] \mathbf{u}_\nu(\rho) = \left[\frac{(\kappa+1)(\ell - \frac{\kappa+1}{2})}{\rho^2} \hat{\tau}_3 - i \frac{MD_+(\rho)}{k_F} \frac{\ell - \frac{\kappa+1}{2}}{\rho} \hat{\tau}_1 \right] \mathbf{u}_\nu(\rho), \quad (117)$$

ただし、 $D_\pm(\rho) \equiv \Delta_{+1}(\rho) \pm \Delta_{-1}(\rho)$, $\mathbf{u}_\nu(\rho) = [u_\nu(\rho), v_\nu(\rho)]^T$, $\nu = (n, \ell, k)$ とした。また、 $\mathcal{L}_m \equiv \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + k_\mu^2 \sin^2(\alpha)$ として、 $m = \sqrt{\ell^2 - (\kappa+1)\ell + \frac{(\kappa+1)^2}{2}}$ 及び 2×2 単位行列 $\hat{\tau}_0 = \text{diag}(1, 1)$ を導入した。尚、 $\mu < 0$ の領域では零エネルギー解は存在しないので、ここでは $\mu > 0$ のみ考えることにする。

文献 [49] の手順に従い、カットオフ半径 ρ_c を導入する。この半径内において $\Delta(r) = 0$ とする。以下の条件を満たす場合に BdG 方程式 (117) の解析解を得ることができる (i) $|\ell| \ll \rho_c k_F \ll k_F \xi$, (ii) $k_F \xi \gg 1$, (iii) $|E_\nu| \ll |\mu|^2 \sin^2(\alpha)$, 及び (iv) $|\Delta_{+1}(\rho)| \gg |\Delta_{-1}(\rho)|$ 。特に、制限 (i) と (ii) のために、弱結合極限を考えることになる。

$\rho < \rho_c$ の領域において、BdG 方程式 (117) の解は直ちに求まる：

$$\mathbf{u}_\nu(r) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} J_\ell(k_+(\alpha)r) \\ J_{\ell-\kappa-1}(k_-(\alpha)r) \end{bmatrix}, \quad k_\pm(\alpha) \equiv k_\mu \sin(\alpha) \pm \frac{E_\nu}{v_\mu(\alpha)}. \quad (118)$$

ただし \mathcal{N} は規格化定数であり、 $v_\mu(\alpha) = k_\mu \sin(\alpha)/M$ とした。

一方で、 $\rho > \rho_c$ の領域における解を求めるために、準粒子波導関数を k_F^{-1} 程度の早い振動を伴う Hankel 関数 $H_m^{(i)}(k_\mu \sin(\alpha)\rho)$ と ξ 程度のゆっくりとした空間変化を記述する関数 $\varphi_i(\rho)$ に分解する (アンドレーエフ近似)：

$$\mathbf{u}_\nu(\rho) = H_m^{(1)}(k_\mu \sin(\alpha)\rho) \varphi_1(\rho) + H_m^{(2)}(k_\mu \sin(\alpha)\rho) \varphi_2(\rho). \quad (119)$$

これを BdG 方程式 (117) に代入し、さらに上記の条件 (i)-(iii) を用いると BdG 方程式は

$$\left[\hat{\tau}_0 \frac{d}{d\rho} + \hat{\tau}_2 \frac{MD_-}{k_F} \right] \varphi_1(\rho) = \left[-\hat{\tau}_1 \frac{D_+}{k_F v_\mu} \frac{\ell - \frac{\kappa+1}{2}}{\rho} + i \hat{\tau}_3 \left\{ \frac{E_\nu}{v_\mu} - \frac{(\kappa+1)(\ell - \frac{\kappa+1}{2})}{2M v_\mu \rho^2} \right\} \right] \varphi_1(\rho). \quad (120)$$

尚, $\varphi_2(\rho) \propto \hat{\tau}_3 \varphi_1^*(\rho)$ という関係が成立することに注意しておく. また, $D_{\pm} \equiv D_{\pm}(\rho)$, $v_{\mu} \equiv v_{\mu}(\alpha)$ とした. 上記の条件 (i)-(iii) を適用すると, 式 (120) の右辺は左辺と比べて非常に小さな摂動とみなすことができる. このとき, 式 (120) の解は直ちに

$$\varphi_1(\rho) \simeq B_1 e^{-\chi(\rho)} \begin{bmatrix} e^{i\psi_1(r)} \\ i e^{i\psi_2(r)} \end{bmatrix}, \quad \chi(\rho) \equiv \frac{M}{k_F} \int_0^{\rho} [\Delta_{+1}(\rho') - \Delta_{-1}(\rho')] d\rho' \quad (121)$$

となることがわかる. ただし, $|\psi_{1,2}(\rho)| \ll 1$ であることを用いた. また, $\psi_1(r) = -\psi_2(r) \equiv \psi(r)$ であり,

$$\psi(\rho) = - \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{E_{\nu}}{v_{\mu}(\alpha)} - \frac{(\kappa+1)(\ell - \frac{\kappa+1}{2})}{2Mv_{\mu}(\alpha)\rho'^2} - \frac{D_{+}(\rho')}{v_F} \frac{\ell - \frac{\kappa+1}{2}}{Mv_{\mu}(\alpha)\rho'} \right] e^{-2\{\chi(\rho') - \chi(\rho)\}} d\rho'. \quad (122)$$

以上で, 各領域 $\rho < \rho_c$ と $\rho_c < \rho$ においてそれぞれ固有関数が得られた. ここで, 式 (118) では $k_{\pm}(\alpha)$ に, 式 (121) では位相 $\psi(\rho)$ にエネルギー固有値 E_{ν} が含まれている. これら2つの領域で別々に得られた固有関数は境界 $\rho = \rho_c$ において連続的に繋がらなければならない. この波動関数の連続性より, エネルギー固有値に対する関係式が得られる. Bessel 関数 $J_{\ell}(z)$ 及び Hankel 関数 $H_{\ell}^{(1,2)}(z)$ の $z \gg |\ell|$ における漸近展開を利用すると, 領域 $\rho < \rho_c$ における固有関数 (118) が

$$u_{\nu}(\rho) \approx \mathcal{N} \sqrt{\frac{2M}{\pi v_{\mu}(\alpha)\rho}} \begin{bmatrix} \cos \left(k_{+}(\alpha)\rho + \frac{\ell^2 - \frac{1}{4}}{2k_{+}(\alpha)\rho} - \frac{2\ell+1}{4}\pi \right) \\ \cos \left(k_{-}(\alpha)\rho + \frac{\ell_v^2 - \frac{1}{4}}{2k_{-}(\alpha)\rho} - \frac{2\ell_v+1}{4}\pi \right) \end{bmatrix}, \quad (123)$$

と展開できる. 一方で, 領域 $\rho > \rho_c$ における式 (119) は式 (121) を用いて $\rho k_F > \rho_c k_F \gg |\ell|$ にて展開すると

$$u_{\nu} \approx \sqrt{\frac{2M}{\pi v_{\mu}(\alpha)\rho}} e^{-\chi(\rho)} \begin{bmatrix} B_1 e^{i\eta_{+}(\rho)} + B_2 e^{-i\eta_{+}(\rho)} \\ i B_1 e^{i\eta_{-}(\rho)} + i B_2 e^{-i\eta_{-}(\rho)} \end{bmatrix}. \quad (124)$$

ここで,

$$\eta_{\pm}(\rho) \equiv Mv_{\mu}(\alpha)\rho + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2Mv_{\mu}(\alpha)\rho} - \frac{2m+1}{4}\pi \pm \psi(\rho). \quad (125)$$

さて, 係数 $B_{1,2}$ を決定しよう. これは式 (123) と (124) で示された2つの領域での波動関数 $u_{\nu}(\rho)$ を $\rho = \rho_c$ にて接続するための条件から求まる. まず, 係数 $B_{1,2}$ を一般性を失うことなく, 位相パラメータ γ を用いて以下のように表すことにする:

$$B_1 = \frac{\mathcal{N}}{2} e^{i\gamma}, \quad B_2 = \frac{\mathcal{N}}{2} e^{-i\gamma}. \quad (126)$$

この係数 $B_{1,2}$ を用いて式 (123) と (124) とを比較することで $\psi(\rho)$ が以下のように決定される:

$$\psi(\rho) \approx \frac{E_{\nu}}{v_{\mu}(\alpha)}\rho + \frac{(\kappa+1)(\ell - \frac{\kappa+1}{2})}{2Mv_{\mu}(\alpha)\rho} + \frac{\pi}{2}(m - \ell) - \gamma. \quad (127)$$

同様にして、式 (123) と (124) より $\psi(\rho)$ に対する別の表現が

$$\psi(\rho) \approx \frac{E_\nu}{v_\mu(\alpha)}\rho + \frac{(\kappa+1)(\ell - \frac{\kappa+1}{2})}{2Mv_\mu(\alpha)\rho} - \frac{\pi}{2}(m - \ell + \kappa + 1) + \gamma - n\pi, \quad (128)$$

と与えられる。ただし、 $n \in \mathbb{Z}$ である。まず γ に注目しよう。 $\psi(\rho)$ に対するこれらの2つの表現 (127), (128) が等価であるためには γ が以下のように満たされている必要がある：

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \left(m - \ell + \frac{\kappa+1}{2} \right) + \frac{\pi}{2}n. \quad (129)$$

$\psi(\rho)$ の2つの表現式 (122) と Eq. (127) に γ の関係式 (129) を代入すると、この2つの表現は $\rho = \rho_c$ において等価であるべきである。 $\rho = \rho_c$ での $\psi(\rho)$ 、つまり、波動関数 $u_\nu(\rho)$ の接続条件より BdG 方程式 (57) のエネルギー固有値が

$$E_\nu = - \left(\ell - \frac{\kappa+1}{2} \right) \omega_0 + \left(n - \frac{\kappa+1}{2} \right) \sin(\alpha) \omega_1, \quad (130)$$

として求まる。ここで、

$$\omega_0 \equiv \frac{\int_{\rho_c}^{\infty} \frac{\kappa_{+1}\Delta_{+1}(\rho') - \kappa_{-1}\Delta_{-1}(\rho')}{k_F\rho'} e^{-2\chi(\rho')} d\rho'}{\int_0^{\infty} e^{-2\chi(\rho')} d\rho'}, \quad \omega_1 \equiv \frac{\pi k_\mu}{2M \int_0^{\infty} e^{-2\chi(\rho')} d\rho'}. \quad (131a)$$

式 (130) で得られた固有エネルギーは文献 [38, 35] で得られた結果を再現しており、たとえマイノリティ成分 Δ_{-1} が渦周りで出現したとしても零エネルギー固有値は変わらずに存在し得ることに注意したい。尚、下で示すように零エネルギー固有状態の波動関数もマイノリティ成分の有無に依存しない。

CdGM 状態の固有関数についても整理しておく。式 (124) から (129) を式 (127) へ代入すると直ちに CdGM 状態の固有関数が得られる：

$$\begin{bmatrix} u_{n,\ell,q}(\rho) \\ v_{n,\ell,q}(\rho) \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} J_\ell(k_+(\alpha)\rho) \\ J_{\ell-\kappa-1}(k_-(\alpha)\rho) \end{bmatrix} \exp \left\{ -\frac{M}{k_F} \int_0^\rho [\Delta_{+1}(\rho') - \Delta_{-1}(\rho')] d\rho' \right\}. \quad (132)$$

$\omega_{0,1}$ のエネルギースケールを評価するために、渦芯周りでの対ポテンシャルの形を以下のように仮定しよう： $\Delta_{+1}(\rho) = \Delta \tanh(\rho/\xi)$, $\Delta_{-1}(\rho) = 0$ 。この仮定の下で式 (131) の積分は直ちに実行することができ、 $\int_0^\infty e^{-2\chi(\rho')} d\rho' = \xi$ に注意すると具体的に、 $\omega_1 \approx \frac{\pi}{2}\Delta$ 及び $\omega_0 \approx \kappa \frac{\Delta^2}{E_F}$ となることがわかる。故に、エネルギー固有値 E_ν は2つの異なるエネルギースケール Δ と Δ^2/E_F とから成ることがわかる。

参考文献

- [1] J. Bardeen, L. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [2] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York—Amsterdam, 1966).

- [3] 中嶋貞雄, 「超伝導入門」新物理学シリーズ 9 (培風館).
- [4] A. J. Leggett, J. Phys. C **6**, 3187 (1973); Ann. Phys. (N.Y.) **85**, 11 (1974).
- [5] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
- [6] D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phase of Helium 3* (Taylor & Francis, London, 1990).
- [7] M. Sigrist and K. Ueda, Rev. Mod. Phys. **63**, 239 (1991).
- [8] N. Nakai, P. Miranović, M. Ichioka, H. F. Hess, K. Uchiyama, H. Nishimori, S. Kaneko, N. Nishida, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **97**, 147001 (2006).
- [9] S. Kashiwaya and Y. Tanaka, Rep. Prog. Phys. **63**, 1641 (2000).
- [10] 浅野泰寛, 田仲由喜夫, 柏谷聡, 固体物理 **38**, 125 (2003); 田仲由喜夫, 浅野泰寛, 固体物理, **40** 683 (2005).
- [11] 田仲由喜夫, 柏谷聡, 日本物理学会誌 **64**, 527 (2009).
- [12] Y. Tanaka, M. Sato, and N. Nagaosa, arXiv:1105.4700.
- [13] K. Nagai, Y. Nagato, M. Yamamoto, and S. Higashitani, J. Phys. Soc. Jpn. **77**, 111003 (2008).
- [14] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. Lett. **74**, 3451 (1995).
- [15] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Oxford University Press, U.S.A., 2003).
- [16] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).
- [17] A. Yu Kitaev, AIP Conf. Proc. **1134**, 22 (2009).
- [18] S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, New J. Phys. **12**, 065010 (2010).
- [19] 笠真生, 古崎昭, 固体物理 **45**, 731 (2010).
- [20] 佐藤昌利, 物性研究 **94**, 311 (2010).
- [21] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, arXiv:1008.2006.
- [22] T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 1355 (1996).

- [23] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1975).
- [24] T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 104006 (2007).
- [25] G. E. Volovik, JETP Lett. **91**, 201 (2010).
- [26] M. Sato, Y. Tanaka, K. Yada, and T. Yokoyama, Phys. Rev. B **83**, 224511 (2011).
- [27] P. W. Anderson and W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. **30**, 1108 (1973).
- [28] Y. Tsutsumi, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. B **83**, 094510 (2011) and references therein.
- [29] N. D. Mermin and T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **46**, 594 (1976).
- [30] T. Mizushima, K. Machida, and T. Kita, Phys. Rev. Lett. **89**, 030401 (2002) and references therein.
- [31] T. Ohmi and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 1822 (1998).
- [32] T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **81**, 742 (1998).
- [33] M. Ueda and Y. Kawaguchi, arXiv:1001.2072.
- [34] Y. Tsutsumi, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **79**, 113601 (2010).
- [35] M. Stone and R. Roy, Phys. Rev. B **69**, 184511 (2004).
- [36] C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- [37] K. M. Suzuki, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. A **77**, 063617 (2008).
- [38] N.B. Kopnin and M.M. Salomaa, Phys. Rev. B **44**, 9667 (1991).
- [39] H. F. Hess *et al.*, Phys. Rev. Lett. **62**, 214 (1989); **64**, 2711 (1990).
- [40] N. Hayashi, T. Isoshima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **80**, 2921 (1998).
- [41] N. Hayashi, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 3368 (1998).
- [42] H. Nishimori *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **73**, 3274 (2004).
- [43] M. Möttönen, T. Mizushima, T. Isoshima, M. M. Salomaa, and K. Machida, Phys. Rev. A **68**, 023611 (2003).

- [44] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka, Phys. Rev. Lett. **93**, 257002 (2004).
- [45] T. Isoshima *et al.*, Phys. Rev. A **61**, 063610 (2000); A. E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).
- [46] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer¹, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Nature **435**, 1047 (2005).
- [47] M. Matsumoto and R. Heeb, Phys. Rev. B **65**, 014504 (2001).
- [48] T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **101**, 150409 (2008).
- [49] T. Mizushima and K. Machida, Phys. Rev. A **81**, 053605 (2010).
- [50] T. Mizushima and K. Machida, Phys. Rev. A **82**, 023624 (2010).
- [51] 水島 健, 市岡 優典, 町田 一成, 日本物理学会誌 **64**, 836 (2009).
- [52] S. Tewari, S. Das Sarma, and D.-H. Lee, Phys. Rev. Lett. **99**, 037001 (2007).
- [53] V. Gurarie and L. Radzihovsky, Phys. Rev. B **75**, 212509 (2007).
- [54] N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000).
- [55] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
- [56] G. E. Volovik and V. P. Mineev, JETP Lett. **24**, 561 (1976).
- [57] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **55**, 1184 (1985).
- [58] T. Kawakami, Y. Tsutsumi, and K. Machida, Phys. Rev. B **79**, 092506 (2009).
- [59] T. Kawakami, Y. Tsutsumi, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **79**, 044607 (2010).
- [60] T. Kawakami, T. Mizushima, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **80**, 044603 (2011).
- [61] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001).
- [62] M. Yamashita, K. Izumina, A. Matsubara, Y. Sasaki, O. Ishikawa, T. Takagi, M. Kubota, and T. Mizusaki, Phys. Rev. Lett. **101**, 025302 (2008).
- [63] S.-B. Chung, H. Bluhm, and E. A. Kim: Phys. Rev. Lett. **99**, 197002 (2007).
- [64] J. Jang, D. G. Ferguson, V. Vakaryuk, R. Budakian, S. B. Chung, P. M. Goldbart, Y. Maeno, Science **311**, 186 (2011).
- [65] V. Vakaryuk and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **103**, 057003 (2009).

- [66] See for example, T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 216 (1998) and references therein.
- [67] S.-B. Chung and S.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **103**, 235301 (2009).
- [68] Y. Nagato, S. Higashitani, and K. Nagai, J. Phys.Soc. Jpn. **78**, 123603 (2009).
- [69] G. E. Volovik, JETP Lett. **90**, 398 (2009).
- [70] W. F. Brinkman, H. Smith, D. D. Osheroff, and E. I. Blount, Phys. Rev. Lett. **33**, 624 (1974).
- [71] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14** (1937) 171; 英訳については, 素粒子論研究 **63** (1981) 149.
- [72] 九後太一郎, 「ゲージ場の量子論 I」 新物理学シリーズ 23 (培風館) .
- [73] See for the details, G.W. Semenoff and P. Sodano, Electron. J. Theor. Phys. **10**, 157 (2006).
- [74] E.J. Weinberg, Phys. Rev. D **24**, 2669 (1981).
- [75] R. Jackiw and P. Rossi, Nucl. Phys. **190**, 681 (1981).
- [76] K. Machida and H. Nakanishi, Phys. Rev. B **30**, 122 (1984).
- [77] H. Takayama, Y. R. Lin-Liu, and K. Maki, Phys. Rev. B **21**, 2388 (1980).
- [78] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008).
- [79] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52**, 2111 (1984).
- [80] A. Stern, F. von Oppen, and E. Mariani, Phys. Rev. B **70**, 205338 (2004).
- [81] S. Yasui, K. Itakura, and M. Nitta, arXiv:1109.2755.
- [82] M. Cheng, V. Galitski, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **84**, 104529 (2011).
- [83] A. Y. Kitaev, Ann. Phys.(N.Y.) **303**, 2 (2003).
- [84] M. Stone and S.-B. Chung, Phys. Rev. B **73**, 014505 (2006).
- [85] G. E. Volovik, JETP Lett. **70**, 609 (1999).